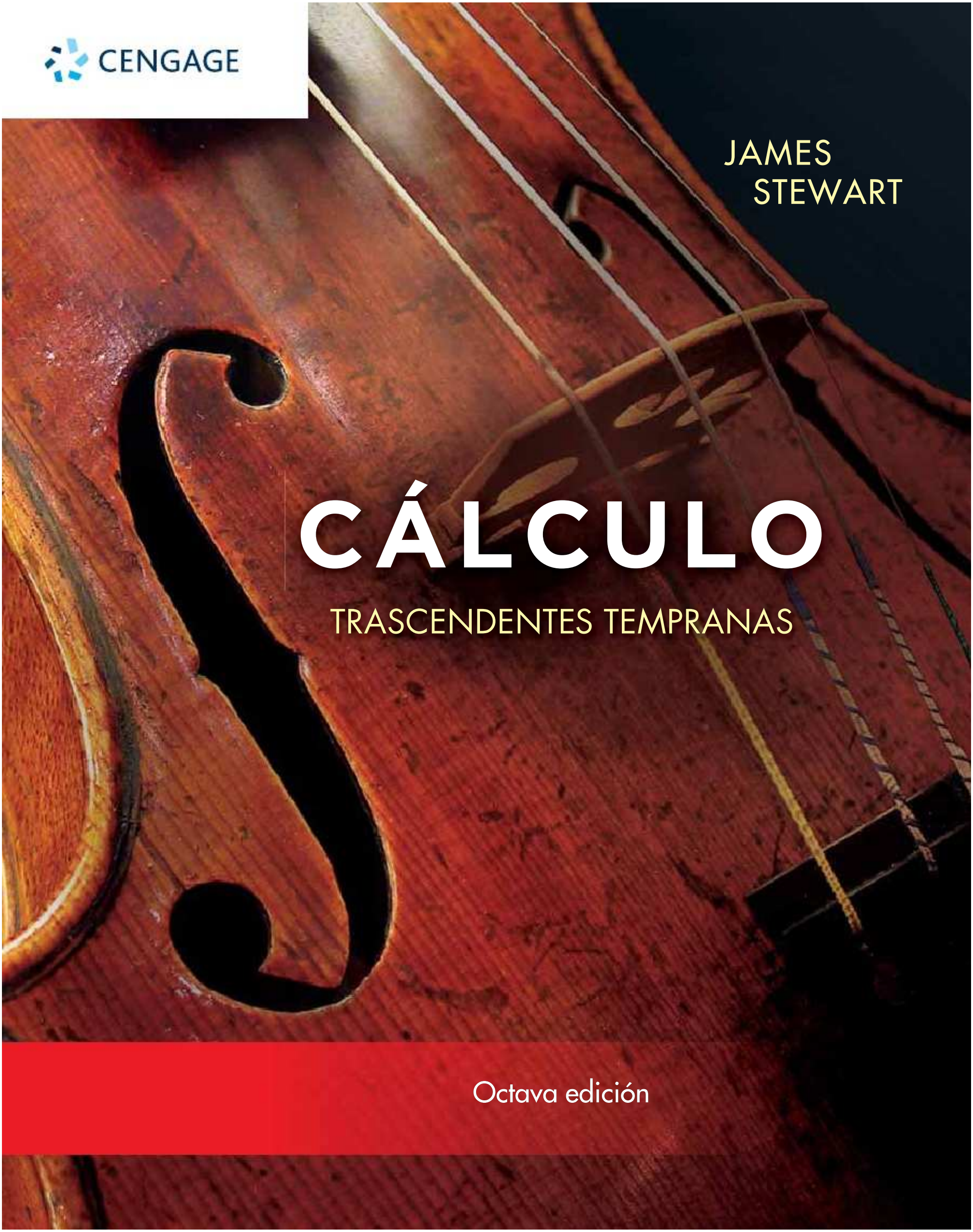
CENGAGE

JAMES
STEWART

CÁLCULO

TRASCENDENTES TEMPRANAS



Octava edición

CÁLCULO

TRASCENDENTES TEMPRANAS

OCTAVA EDICIÓN

JAMES STEWART

McMASTER UNIVERSITY Y UNIVERSITY OF TORONTO

Traducción

Ana Elizabeth García Hernández

Enrique C. Mercado González

Revisión técnica

Ileana Borja Tecuatl

Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN

Hiram Cárdenas Gordillo
Facultad de Ingeniería, Universidad La Salle, México

Pedro Vásquez Urbano
Universidad de Puerto Rico - Mayaguez

Gilgamesh Luis Raya
Universidad Politécnica de Pachuca, México

Antonieta Martínez Velasco
Universidad Panamericana, campus Ciudad de México

Luz Citlaly Estrada López
Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería, Universidad de Guadalajara, México

José Ignacio Cuevas González
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas

Armando Silva Castillo
Universidad Politécnica de Pachuca, México

CENGAGE

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

***Cálculo. Trascendentes tempranas*, octava edición.**
James Stewart

Director Higher Education Latinoamérica:
Renzo Casapía Valencia

Gerente editorial Latinoamérica:
Jesús Mares Chacón

Editor Senior Hardside:
Pablo Miguel Guerrero Rosas

Editora de desarrollo
Abril Vega Orozco

Coordinador de manufactura:
Rafael Pérez González

Diseño de portada:
Karla Paola Benítez García

Imagen de portada:
© David Carrick | Dreamstime.com

Composición tipográfica:
Humberto Núñez Ramos
Angélica Toledo Tirado
Alejandro Hernández Hernández

© D.R. 2018 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una compañía de Cengage Learning, Inc.
Carretera México-Toluca núm. 5420, oficina 2301.
Col. El Yaqui. Del. Cuajimalpa. C.P. 05320.
Ciudad de México.
Cengage Learning® es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo, amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial.

Traducido del libro *Calculus: Early Transcendentals*, Eighth Edition, International Metric Version. James Stewart.
Publicado en inglés por Cengage Learning ©2016.
ISBN: 978-1-305-27237-8

Datos para catalogación bibliográfica:
Stewart, James. *Cálculo. Trascendentes tempranas,* octava edición.
ISBN: 978-607-526-548-3

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 20 19 18 17

Contenido

PREFACIO xi

AL ESTUDIANTE xxiii

CALCULADORAS, COMPUTADORAS Y OTROS DISPOSITIVOS DE GRAFICACIÓN xxiv

PRUEBAS DE DIAGNÓSTICO xxvi

Un adelanto del cálculo 1

1 Funciones y modelos 9

© Pictura Collectus/Alamy

1.1 Cuatro maneras de representar una función 10

1.2 Modelos matemáticos: un catálogo de funciones esenciales 23

1.3 Funciones nuevas a partir de funciones previas 36

1.4 Funciones exponenciales 45

1.5 Funciones inversas y logarítmicas 55

Repaso 68

Principios para la resolución de problemas 71

2 Límites y derivadas 77

© Jody Ann / Shutterstock.com

2.1 Problemas de la tangente y la velocidad 78

2.2 El límite de una función 83

2.3 Cálculo de límites usando las leyes de los límites 95

2.4 Definición precisa de límite 104

2.5 Continuidad 114

2.6 Límites al infinito; asíntotas horizontales 126

2.7 Derivadas y razones de cambio 140

Proyecto de redacción • Primeros métodos para encontrar tangentes 152

2.8 La derivada como una función 152

Repaso 165

Problemas adicionales 169

3 Reglas de derivación 171

© Mechanik / Shutterstock.com

3.1 Derivadas de funciones polinomiales y exponenciales 172
Proyecto de aplicación • Construcción de una mejor Montaña Rusa 182
3.2 Reglas del producto y el cociente 183
3.3 Derivadas de funciones trigonométricas 190
3.4 La regla de la cadena 197
Proyecto de aplicación • ¿Dónde debería un piloto iniciar el descenso? 208
3.5 Derivación implícita 208
Proyecto de laboratorio • Familia de curvas implícitas 217
3.6 Derivadas de funciones logarítmicas 218
3.7 Razones de cambio en las ciencias naturales y sociales 224
3.8 Crecimiento y decaimiento exponenciales 237
Proyecto de aplicación • Controlar la pérdida de glóbulos rojos durante una cirugía 244
3.9 Razones relacionadas 245
3.10 Aproximaciones lineales y diferenciales 251
Proyecto de laboratorio • Polinomios de Taylor 258
3.11 Funciones hiperbólicas 259
Repaso 266
Problemas adicionales 270

4 Aplicaciones de la derivada 275

© Tatiana Makotra / Shutterstock.com

4.1 Valores máximos y mínimos 276
Proyecto de aplicación • El cálculo de los arcoíris 285
4.2 Teorema del valor medio 287
4.3 Cómo las derivadas afectan la forma de una gráfica 293
4.4 Formas indeterminadas y regla de L'Hôpital 304
Proyecto de redacción • Los orígenes de la regla de L'Hôpital 314
4.5 Resumen para el trazo de curvas 315
4.6 Trazo de gráficas con cálculo y calculadoras 323
4.7 Problemas de optimización 330
Proyecto de aplicación • La forma de una lata 343
Proyecto de aplicación • Aviones y pájaros: minimización de la energía 344
4.8 El método de Newton 345
4.9 Antiderivadas 350
Repaso 358
Problemas adicionales 363

5 Integrales 365

© JRC, Inc. / Alamy

5.1 Áreas y distancias 366
5.2 La integral definida 378
Proyecto de descubrimiento • Funciones de áreas 391
5.3 El teorema fundamental del cálculo 392
5.4 Integrales indefinidas y el teorema del cambio neto 402
Proyecto de redacción • Newton, Leibniz y la invención del cálculo 411
5.5 Regla de sustitución 412
Repaso 421
Problemas adicionales 425

6 Aplicaciones de la integral 427

© Richard Paul Kane / Shutterstock.com

6.1 Áreas entre curvas 428
Proyecto de aplicación • El índice de Gini 436
6.2 Volúmenes 438
6.3 Volúmenes mediante cascarones cilíndricos 449
6.4 Trabajo 455
6.5 Valor promedio de una función 461
Proyecto de aplicación • El cálculo y el béisbol 464
Proyecto de aplicación • Dónde sentarse en el cine 465
Repaso 466
Problemas adicionales 468

7 Técnicas de integración 471

© USDA

7.1 Integración por partes 472
7.2 Integrales trigonométricas 479
7.3 Sustitución trigonométrica 486
7.4 Integración de funciones racionales por fracciones parciales 493
7.5 Estrategias para la integración 503
7.6 Integración utilizando tablas y sistemas algebraicos computacionales 508
Proyecto de descubrimiento • Patrones en integrales 513
7.7 Integración aproximada 514
7.8 Integrales impropias 527
Repaso 537
Problemas adicionales 540

8 Aplicaciones adicionales de la integración 543

© planet5D LLC / Shutterstock.com

8.1 Longitud de arco 544
Proyecto de descubrimiento • Concurso de longitudes de arco 550
8.2 Área de una superficie de revolución 551
Proyecto de descubrimiento • Rotación sobre una pendiente 557
8.3 Aplicaciones a la física y a la ingeniería 558
Proyecto de descubrimiento • Tazas de café complementarias 568
8.4 Aplicaciones a la economía y la biología 569
8.5 Probabilidad 573
Repaso 581
Problemas adicionales 583

9 Ecuaciones diferenciales 585

© Dennis Donohue / Shutterstock.com

9.1 Modelado con ecuaciones diferenciales 586
9.2 Campos direccionales y método de Euler 591
9.3 Ecuaciones separables 599
Proyecto de aplicación • ¿Qué tan rápido se vacía un tanque? 608
Proyecto de aplicación • ¿Qué es más rápido, subir o bajar? 609
9.4 Modelos para el crecimiento poblacional 610
9.5 Ecuaciones lineales 620
9.6 Sistemas presa-depredador 627
Repaso 634
Problemas adicionales 637

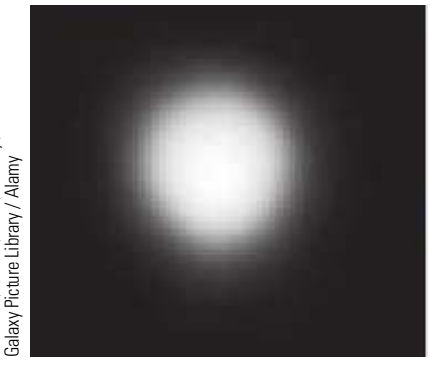
10 Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares 639

© Stocktrek / Stockbyte / Getty Images

10.1 Curvas definidas por ecuaciones paramétricas 640
Proyecto de laboratorio • Circunferencias que corren alrededor de circunferencias 648
10.2 Cálculo con curvas paramétricas 649
Proyecto de laboratorio • Curvas de Bézier 657
10.3 Coordenadas polares 658
Proyecto de laboratorio • Familias de curvas polares 668
10.4 Áreas y longitudes en coordenadas polares 669

10.5 Secciones cónicas 674
10.6 Secciones cónicas en coordenadas polares 682
Repaso 689
Problemas adicionales 692

11 Sucesiones y series infinitas 693


© STScI / NASA / ESA / Galaxy / Galaxy Picture Library / Alamy

11.1 Sucesiones 694
Proyecto de laboratorio • Sucesiones logísticas 707
11.2 Series 707
11.3 La prueba de la integral y estimaciones de sumas 719
11.4 Pruebas por comparación 727
11.5 Series alternantes 732
11.6 Convergencia absoluta y las pruebas de la razón y la raíz 737
11.7 Estrategia para probar series 744
11.8 Series de potencias 746
11.9 Representación de funciones como series de potencias 752
11.10 Series de Taylor y de Maclaurin 759
Proyecto de laboratorio • Un límite escurridizo 773
Proyecto de redacción • Cómo descubrió Newton las series binomiales 773
11.11 Aplicaciones de los polinomios de Taylor 774
Proyecto de aplicación • Radiación de las estrellas 783
Repaso 784
Problemas adicionales 787

12 Vectores y la geometría del espacio 791

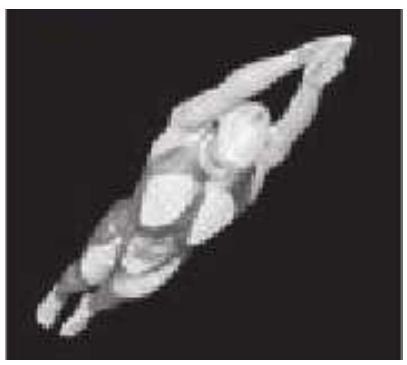
12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales 792
12.2 Vectores 798
12.3 El producto punto 807
12.4 El producto cruz 814
Proyecto de descubrimiento • La geometría de un tetraedro 823
12.5 Ecuaciones de rectas y planos 823
Proyecto de laboratorio • Poner la tridimensionalidad en perspectiva 833
12.6 Cilindros y superficies cuádricas 834
Repaso 841
Problemas adicionales 844

13 Funciones vectoriales 847

© Natalia Davydenko/Shutterstock.com

13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio 848
13.2 Derivadas e integrales de funciones vectoriales 855
13.3 Longitud de arco y curvatura 861
13.4 Movimiento en el espacio: velocidad y aceleración 870
Proyecto de aplicación • Leyes de Kepler 880
Repaso 881
Problemas adicionales 884

14 Derivadas parciales 887


Cortesía de © Speedo y ANSYS, Inc.

14.1 Funciones de varias variables 888
14.2 Límites y continuidad 903
14.3 Derivadas parciales 911
14.4 Planos tangentes y aproximaciones lineales 927
Proyecto de aplicación • El Speedo LZR Racer 936
14.5 La regla de la cadena 937
14.6 Derivadas direccionales y el vector gradiente 946
14.7 Valores máximos y mínimos 959
Proyecto de aplicación • Diseño de un contenedor de desechos 970
Proyecto de descubrimiento • Aproximaciones cuadráticas y puntos críticos 970
14.8 Multiplicadores de Lagrange 971
Proyecto de aplicación • La ciencia de los cohetes 979
Proyecto de aplicación • Optimización de hidroturbinas 980
Repaso 981
Problemas adicionales 985

15 Integrales múltiples 987

© Juan Gaertner/ Shutterstock.com

15.1 Integrales dobles en rectángulos 988
15.2 Integrales dobles en regiones generales 1001
15.3 Integrales dobles en coordenadas polares 1010
15.4 Aplicaciones de las integrales dobles 1016
15.5 Área de una superficie 1026

15.6 Integrales triples 1029
Proyecto de descubrimiento • Volúmenes de hiperesferas 1040
15.7 Integrales triples en coordenadas cilíndricas 1040
Proyecto de descubrimiento • La intersección de tres cilindros 1044
15.8 Integrales triples en coordenadas esféricas 1045
Proyecto de aplicación • Carrera sobre ruedas 1052
15.9 Cambio de variables en integrales múltiples 1052
Repaso 1061
Problemas adicionales 1065

16 Cálculo vectorial 1067

© Everett Collection/Glow Images

16.1 Campos vectoriales 1068
16.2 Integrales de línea 1075
16.3 El teorema fundamental para integrales de línea 1087
16.4 Teorema de Green 1096
16.5 Rotacional y divergencia 1103
16.6 Superficies paramétricas y sus áreas 1111
16.7 Integrales de superficie 1122
16.8 Teorema de Stokes 1134
Proyecto de redacción • Tres hombres y dos teoremas 1140
16.9 El teorema de la divergencia 1141
16.10 Resumen 1147
Repaso 1148
Problemas adicionales 1151

17 Ecuaciones diferenciales de segundo orden 1153

© CS Stock/Shutterstock.com

17.1 Ecuaciones lineales de segundo orden 1154
17.2 Ecuaciones lineales no homogéneas 1160
17.3 Aplicaciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden 1168
17.4 Soluciones con series de potencias 1176
Repaso 1181

Apéndices A1

A Números, desigualdades y valores absolutos A2
B Rectas y geometría usando coordenadas A10
C Gráficas de ecuaciones de segundo grado A16
D Trigonometría A24
E Notación sigma A34
F Demostración de teoremas A39
G El logaritmo definido como una integral A50
H Números complejos A57
I Respuestas a los ejercicios con número impar A65

Índice analítico I1

Referencias R1

Al estudiante

Leer un libro de texto de cálculo es diferente a leer un periódico o una novela, o incluso un libro de física. No se desanime si tiene que leer un pasaje más de una vez para comprenderlo. Debería tener lápiz y papel y una calculadora a la mano para trazar un diagrama o hacer un cálculo.

Algunos estudiantes comienzan probando sus problemas de tarea y leen el texto solo si se atoran en un ejercicio. Yo sugiero que un plan mucho mejor es leer y comprender una sección del texto antes de intentar hacer los ejercicios. En particular, usted debería examinar las definiciones para ver los significados exactos de los términos. Y antes de leer cada ejemplo, sugiero que cubra la solución e intente resolver el problema usted mismo. Obtendrá mucho más al estudiar la solución si lo hace así.

Parte de la finalidad de este curso es estimular su pensamiento lógico. Aprenda a escribir las soluciones de los ejercicios en forma coherente paso a paso, con oraciones explicatorias, no solo como una cadena de ecuaciones o fórmulas inconexas.

Las respuestas a los ejercicios con número impar aparecen al final del libro, en el apéndice I. Algunos ejercicios piden una explicación, interpretación o descripción verbal. En esos casos, no existe una manera correcta y única de expresar la respuesta, así que no se preocupe si no ha encontrado la respuesta definitiva. Además, hay varias formas en las cuales expresar una respuesta numérica o algebraica, así que si su respuesta difiere de la mía, no suponga de inmediato que está equivocado. Por ejemplo, si la respuesta dada al final del libro es $\sqrt{2} - 1$ y usted obtiene $1/(1+\sqrt{2})$, entonces usted está en lo correcto y racionalizar el denominador mostrará que las respuestas son equivalentes.

El icono indica un ejercicio que definitivamente requiere el uso de una calculadora graficadora o una computadora con software de graficación. Pero eso no significa que dispositivos de graficación no puedan usarse también para verificar su trabajo en los demás ejercicios. El símbolo SAC se reserva a problemas en los que son requeridos los recursos completos de un sistema algebraico computacional (como Maple, Mathematica o el TI-89).

Usted también encontrará el símbolo , el cual lo previene de cometer un error. He puesto este símbolo al margen en situaciones en que he observado que una gran proporción de mis estudiantes tiende a cometer el mismo error.

Tools for Enriching Calculus, que es un complemento de este texto, se refiere por medio del símbolo TEC y puede ser consultado en el eBook vía Enhanced WebAssign y CourseMate (Visuals y Modules selectos están disponibles en www.stewartcalculus.com). Esto lo dirige a usted a módulos en los que puede explorar aspectos del cálculo para los cuales la computadora es particularmente útil.

Notará que algunos números de ejercicios están impresos en gris: **5**. Esto indica que *Homework Hints* están disponibles para el ejercicio. Estas sugerencias pueden hallarse en stewartcalculus.com así como en Enhanced WebAssign y CourseMate. Las sugerencias de tareas hacen preguntas que le permiten realizar progresos hacia una solución sin realmente darle la respuesta. Usted debe seguir cada sugerencia en forma activa con lápiz y papel para resolver los detalles. Si una sugerencia particular no le permite resolver el problema, puede hacer clic para revelar la sugerencia siguiente.

Le recomiendo conservar este libro para efectos de consulta después de terminar el curso. Dado que es probable que olvide algunos de los detalles específicos del cálculo, el libro servirá como un recordatorio útil cuando deba usar el cálculo en cursos subsecuentes. Y como este libro contiene más material del que puede cubrirse en un curso, también puede servir como un valioso recurso para un científico o ingeniero en ejercicio profesional.

El cálculo es un tema muy interesante, con justicia considerado uno de los grandes logros del intelecto humano. Espero que usted descubra que es no solo útil, sino también intrínsecamente bello.

JAMES STEWART

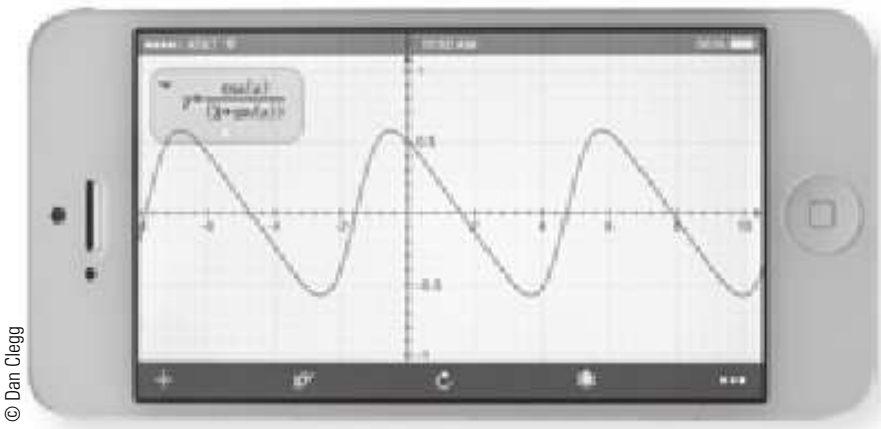
Calculadoras, computadoras y otros dispositivos de graficación

© Dan Clegg

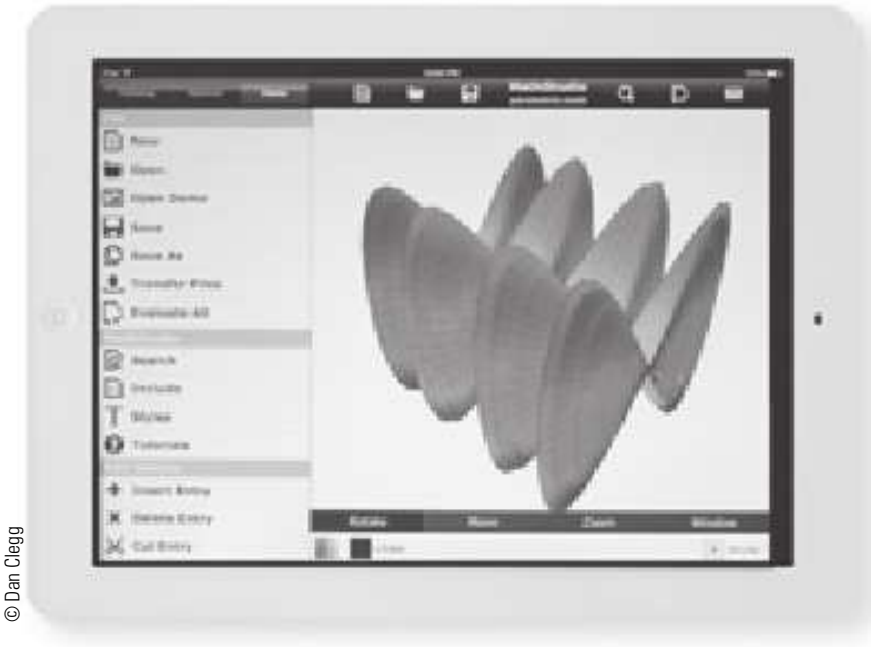
Los adelantos en tecnología siguen ofreciendo una variedad de herramientas cada vez más amplia para hacer matemáticas. Las calculadoras de bolsillo se han vuelto más potentes, lo mismo que los programas de software y los recursos en internet. Además, muchas aplicaciones matemáticas han sido lanzadas para teléfonos inteligentes y tabletas como la iPad.

Algunos ejercicios de este texto están marcados con un icono de graficación, que indica que el uso de alguna tecnología es requerido. A menudo esto significa que se desea que un dispositivo de graficación se use para dibujar la gráfica de una función o ecuación. Usted podría necesitar también tecnología para determinar los ceros de una gráfica o los puntos de intersección de dos gráficas. En algunos casos se usará un dispositivo de cálculo para resolver una ecuación o evaluar numéricamente una integral definida. Muchas calculadoras científicas y graficadoras llevan integradas estas características, como la Texas Instruments TI-84 o TI-Nspire CX. Calculadoras similares son fabricadas por Hewlett Packard, Casio y Sharp.

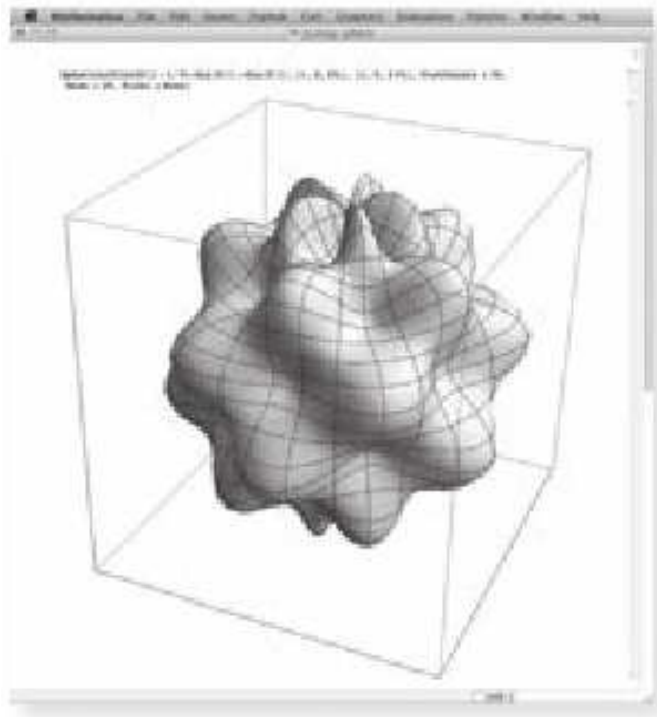
Usted también puede emplear software de computación como *Graphing Calculator* de Pacific Tech (www.pacifict.com) para ejecutar muchas de esas funciones, lo mismo que aplicaciones para teléfonos y tabletas como Quick Graph (Colombiamug) o Math-Studio (Pomegranate Apps). Funcionalidad similar está disponible usando una interfaz web en WolframAlpha.com.



© Dan Clegg



© Dan Clegg



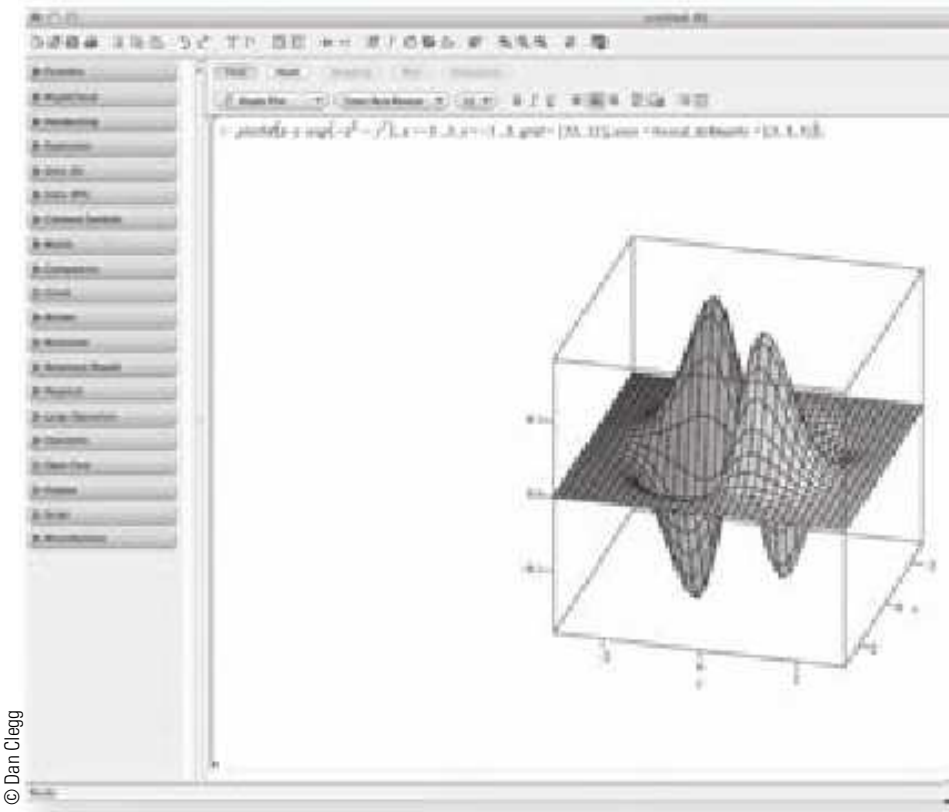
© Dan Clegg

En general, cuando se usa el término “calculadora” en este libro, se refiere al uso de cualquiera de los recursos que se han mencionado.

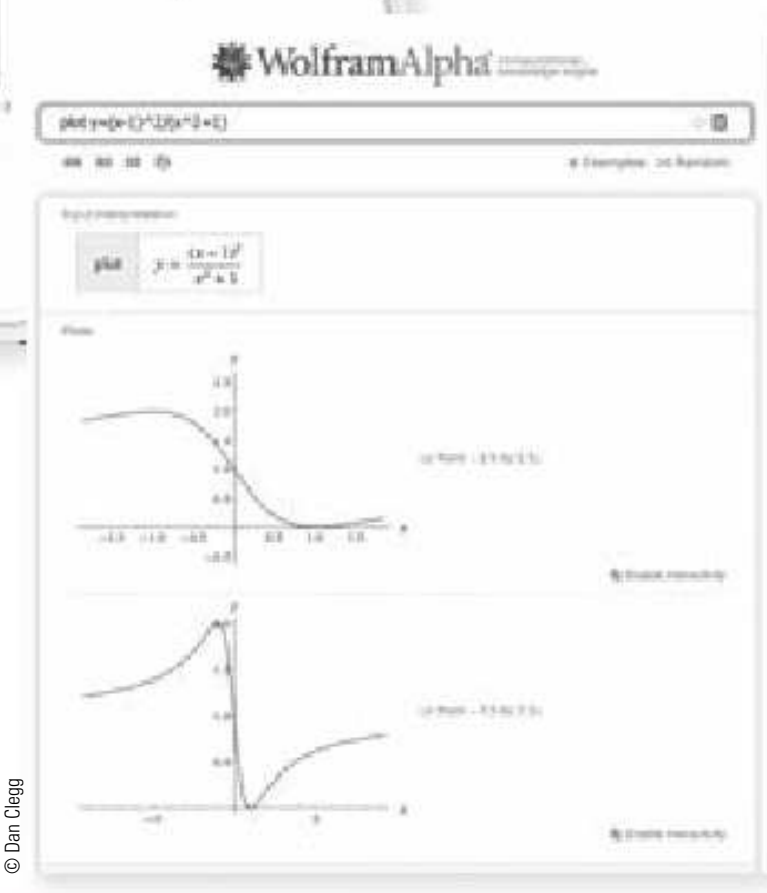
El icono SAC se reserva a problemas en los que son requeridos los recursos completos de un *sistema algebraico computacional* (SAC). Un SAC es capaz de hacer matemáticas (como resolver ecuaciones, calcular derivadas o integrales) *simbólicamente* más que solo numéricamente.

Ejemplos de sistemas algebraicos computacionales firmemente establecidos son los paquetes de software de computación Maple y Mathematica. El sitio web de WolframAlpha usa el motor de Mathematica para proporcionar funcionalidad SAC vía la web.

Muchas calculadoras graficadoras de bolsillo tienen capacidades del SAC, como la TI-89 y TI-Nspire CX CAS de Texas Instruments. Algunas aplicaciones para tabletas y teléfonos inteligentes brindan estas capacidades, como el ya mencionado MathStudio.



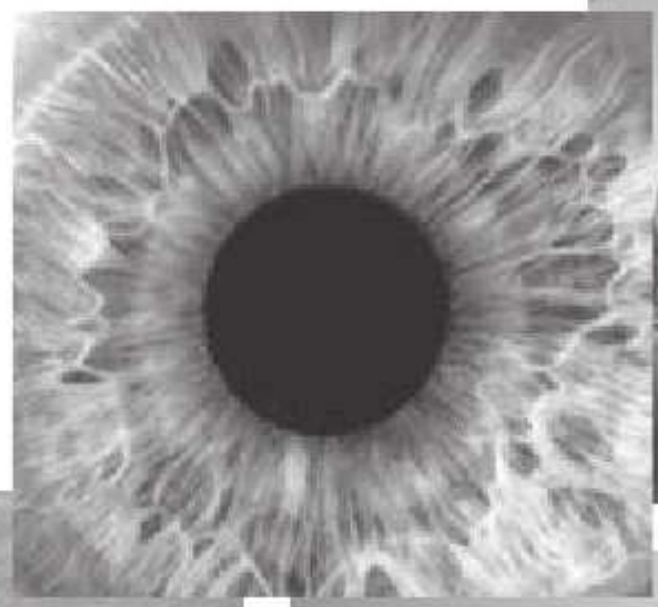
© Dan Clegg



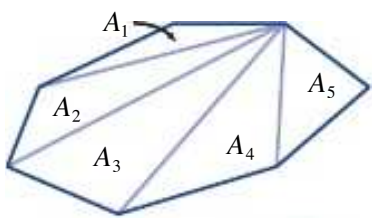
© Dan Clegg

Un adelanto del cálculo

Cuando termine este curso, será capaz de calcular la longitud de la curva utilizada para diseñar el Gateway Arch en St. Louis, determinar dónde un piloto debe iniciar el descenso para un aterrizaje suave, calcular la fuerza sobre un bate de béisbol cuando golpea la pelota y medir la cantidad de luz captada por el ojo humano conforme cambia el tamaño de la pupila.



EL CÁLCULO ES FUNDAMENTALMENTE DIFERENTE DE las matemáticas que ha estudiado anteriormente: el cálculo es menos estático y más dinámico. Se ocupa de los cambios y del movimiento; estudia cantidades que se aproximan a otras cantidades. Por eso puede ser útil tener una visión general del tema antes de comenzar su estudio intensivo. Aquí se da un vistazo de algunas de las ideas principales del cálculo, se muestran cómo surge el concepto de límite cuando se intentan resolver diferentes problemas.



$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

FIGURA 1

El problema del área

Los orígenes del cálculo se remontan a unos 2500 años a los antiguos griegos, quienes calcularon áreas usando el "método de agotamiento". Los griegos sabían cómo encontrar el área de cualquier polígono al dividirlo en triángulos como se ve en la figura 1 y sumar las áreas de estos triángulos.

Un problema mucho más difícil es encontrar el área encerrada por una figura curvada. El método griego de agotamiento consistía en inscribir y circunscribir polígonos en la figura y luego aumentar el número de lados de los polígonos. La figura 2 ilustra este proceso para el caso especial de un círculo con polígonos regulares inscritos.

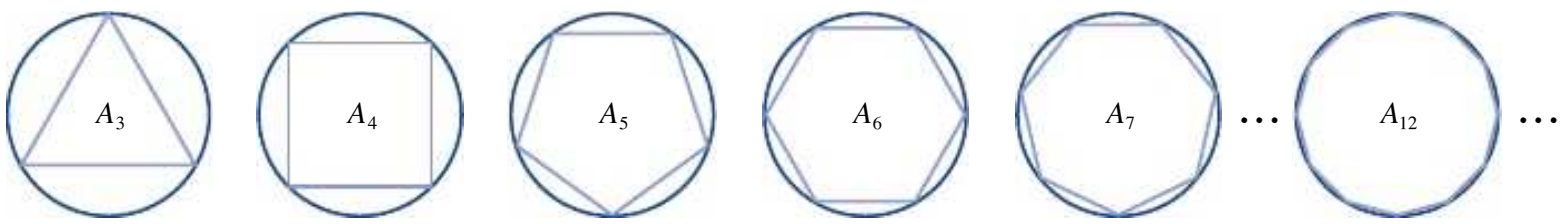


FIGURA 2

Sea A_n el área del polígono inscrito con n lados. A medida que aumenta n, el área se parece cada vez más y más al área del círculo. Se dice que el área del círculo es el *límite* de las áreas de los polígonos inscritos, y se escribe

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

TEC En Preview Visual, puede ver cómo las áreas de los polígonos inscritos y circunscritos se aproximan al área del círculo.

Los griegos no utilizaron de manera explícita el concepto de límite. Sin embargo, por razonamiento indirecto, Eudoxo (siglo V a. C.) utilizó la técnica de agotamiento para demostrar la conocida fórmula para el área de un círculo: $A = \pi r^2$.

En el capítulo 5 se utilizará una idea similar para encontrar las áreas de regiones del tipo que se muestra en la figura 3. Se aproximará al área deseada por medio de áreas de rectángulos (como en la figura 4), disminuyendo el ancho de los rectángulos y luego calculando el área A como el límite de estas sumas de áreas de rectángulos.

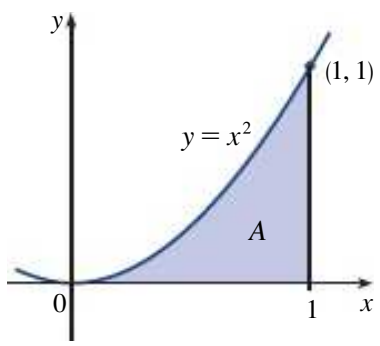


FIGURA 3

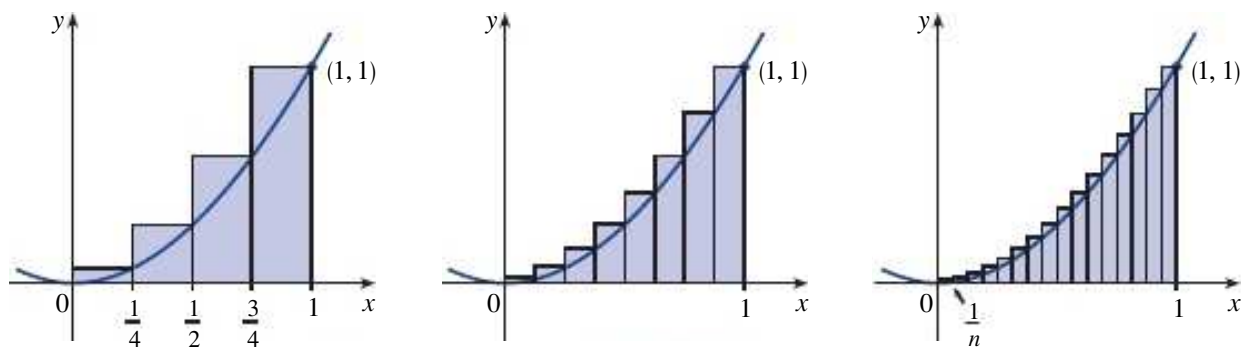


FIGURA 4

El problema del área es el problema central en la rama del cálculo llamado *cálculo integral*. Las técnicas que se desarrollarán en el capítulo 5 para encontrar áreas también permitirán calcular el volumen de un sólido, la longitud de una curva, la fuerza de las aguas contra una presa, la masa y el centro de gravedad de una varilla y el trabajo realizado al bombear agua hacia afuera de un tanque.

El problema de la tangente

Considere el problema de encontrar la ecuación de la recta tangente t a una curva con ecuación $y = f(x)$ en un punto dado P. (En el capítulo 2 se dará una definición precisa de una recta tangente. Por ahora la puede considerar como una recta que toca la curva en P

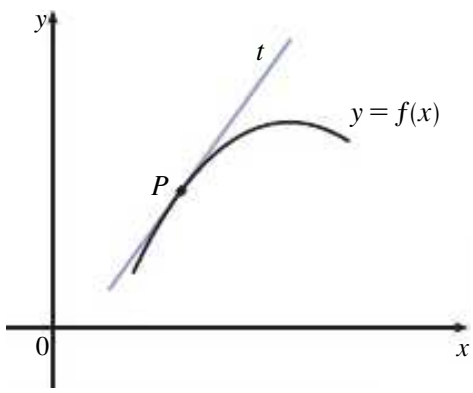


FIGURA 5
La recta tangente en P

como en la figura 5.) Como se sabe que el punto P se encuentra en la recta tangente, se puede encontrar la ecuación de t si se sabe su pendiente m. El problema es que se necesitan dos puntos para calcular la pendiente y se tiene solo un punto P de t. Como una solución alternativa al problema se encuentra en primer lugar una aproximación a m tomando un punto cercano Q de la curva y se calcula la pendiente m_{PQ} de la recta secante PQ. De la figura 6 se ve que

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \boxed{1}$$

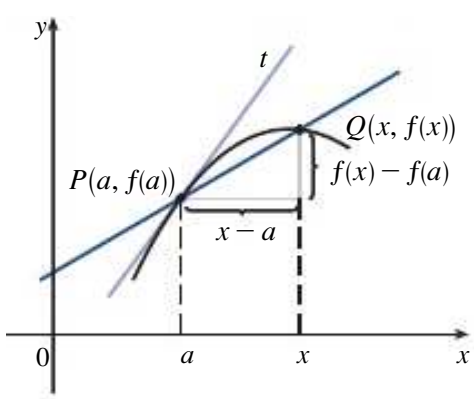


FIGURA 6
La recta secante PQ

Ahora imagine que Q se mueve a lo largo de la curva hacia P como en la figura 7. Puede verse que la recta secante gira y se acerca a la recta tangente como su posición límite. Esto significa que la pendiente de la recta secante se acerca más y más a la pendiente m_{PQ} de la recta tangente. Escriba

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

y diga que m es el límite de m_{PQ} cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva. Puesto que x se aproxima a a cuando Q se aproxima a P, también se puede utilizar la ecuación 1 para escribir

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \boxed{2}$$

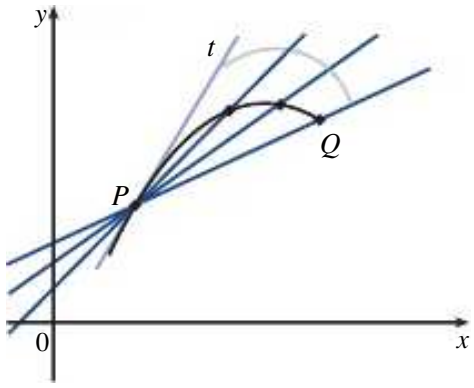


FIGURA 7
Recta secante aproximándose a la recta tangente

En el capítulo 2 se verán ejemplos específicos de este procedimiento.

El problema de la tangente ha dado lugar a la rama del cálculo llamada *cálculo diferencial*, inventada más de 2000 años después que el cálculo integral. Las principales ideas detrás del cálculo diferencial se deben al matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665) y fueron desarrolladas por los matemáticos ingleses John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677) e Isaac Newton (1642-1727); y el matemático alemán Gottfried Leibniz (1646-1716).

Las dos ramas de cálculo y sus principales problemas, el problema del área y el problema de la tangente, parecen ser muy diferentes, pero resulta que hay una conexión muy estrecha entre ellas. El problema de la tangente y el área son problemas inversos en un sentido que se describe en el capítulo 5.

Velocidad

Cuando se ve el velocímetro de un automóvil y se lee que se está desplazando a 48 km/h, ¿qué información se obtiene? Si la velocidad se mantiene constante, después de una hora se habrá desplazado 48 km. Pero, si la velocidad del auto varía, ¿qué significa decir que la velocidad en un instante dado es 48 km/h?

Para analizar esta situación, examine el caso de un automóvil que viaja a lo largo de una carretera recta en el que se supone que es posible medir la distancia recorrida por el vehículo (en metros) a intervalos de un segundo como se registra en la tabla siguiente:

t = tiempo transcurrido (s)	0	1	2	3	4	5
d = distancia (m)	0	2	9	24	42	71

Un primer paso para determinar la velocidad una vez que han transcurrido 2 segundos, es encontrar la velocidad promedio durante el intervalo $2 \leqslant t \leqslant 4$:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

$$= \frac{42 - 9}{4 - 2}$$

$$= 16.5 \text{ m/s}$$

Del mismo modo, la velocidad promedio en el intervalo $2 \leqslant t \leqslant 3$ es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{24 - 9}{3 - 2} = 15 \text{ m/s}$$

Se tiene la sensación de que la velocidad en el instante $t = 2$ no puede ser muy diferente de la velocidad promedio durante un corto intervalo de tiempo desde $t = 2$. Así que imagine que se ha medido la distancia recorrida en intervalos de tiempo de 0.1 segundo como se ve en la tabla siguiente:

t	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
d	9.00	10.02	11.16	12.45	13.96	15.80

Entonces se puede calcular, por ejemplo, la velocidad promedio en el intervalo de tiempo [2, 2.5]:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{15.80 - 9.00}{2.5 - 2} = 13.6 \text{ m/s}$$

Los resultados de estos cálculos se muestran en la tabla siguiente:

Intervalo de tiempo	[2, 3]	[2, 2.5]	[2, 2.4]	[2, 2.3]	[2, 2.2]	[2, 2.1]
Velocidad promedio (m/s)	15.0	13.6	12.4	11.5	10.8	10.2

Las velocidades promedio durante intervalos sucesivamente más pequeños parecen estar aproximándose cada vez más a un número cercano a 10 y, por tanto, se esperaría que la velocidad exactamente en $t = 2$ fuera de 10 m/s. En el capítulo 2 se definirá la velocidad instantánea de un objeto en movimiento, como el valor límite de las velocidades promedio durante intervalos de tiempo cada vez más pequeños.

En la figura 8 se muestra una representación gráfica del movimiento del automóvil al trazar la distancia recorrida como función del tiempo. Si se escribe $d = f(t)$, entonces $f(t)$ es el número de metros recorridos después de t segundos. La velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[2, t]$ es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

que es lo mismo que la pendiente de la recta secante PQ en la figura 8. La velocidad v cuando $t = 2$ es el valor límite de esta velocidad promedio cuando t se aproxima a 2; es decir,

$$v = \lim_{t \to 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

y de la ecuación 2 se reconoce que esta es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en P.

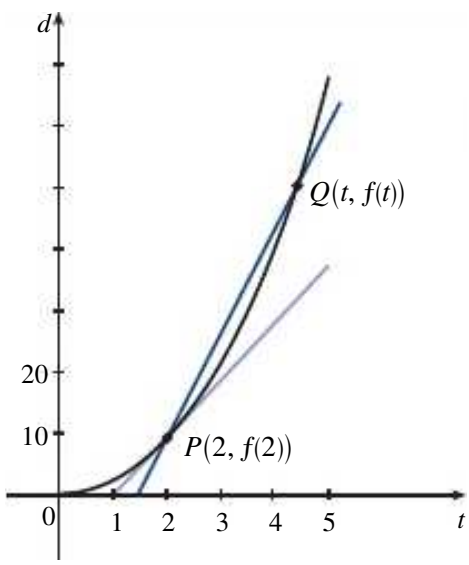
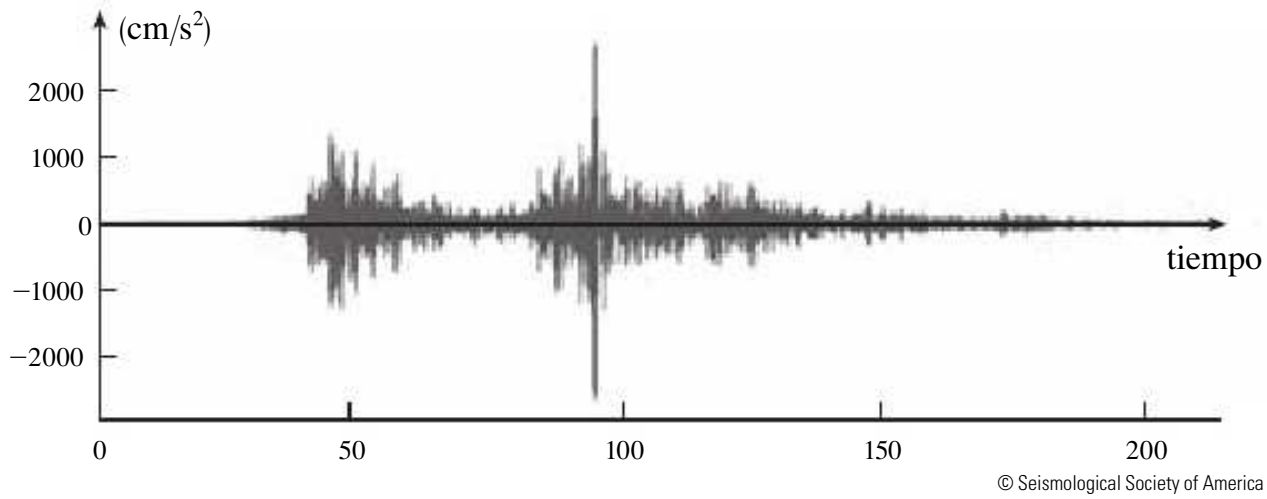


FIGURA 8

1 Funciones y modelos

© Pictura Collectus/Alamy



© Seismological Society of America

A menudo una gráÿca es la mejor manera de representar una función porque transmite mucha información en un vistazo. Se muestra la gráÿca de la aceleración vertical del suelo, creada por el terremoto de 2011 cerca de Tohoku en Japón. El terremoto tuvo una magnitud de 9.0 en la escala de Ritcher y fue tan fuerte que movió el norte de Japón 2.4 metros más cerca de América del Norte.

LOS OBJETOS FUNDAMENTALES CON LOS que trata el cálculo son las funciones. Este capítulo prepara el camino para el cálculo discutiendo las ideas básicas sobre las gráficas de funciones y la manera de transformarlas y combinarlas. Se destaca que una función puede representarse de diferentes maneras: mediante una ecuación, una tabla, una gráfica o con palabras. Se verán los principales tipos de funciones que se presentan en el cálculo y se describirán cómo se utilizan estas funciones para modelar matemáticamente fenómenos del mundo real.

1.1 Cuatro maneras de representar una función

Las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra. Considere las cuatro situaciones siguientes:

A. El área A de un círculo depende de su radio r. La regla que relaciona A con r está dada por la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo r hay asociado un valor de A, por lo que se dice que A es una *función* de r.

B. La población humana del mundo P depende del tiempo t. La tabla muestra las estimaciones de la población mundial $P(t)$ en el tiempo t, para algunos años. Por ejemplo,

$$P(1950) \approx 2\,560\,000\,000$$

Pero para cada valor del tiempo t hay un valor correspondiente de P, por lo que se dice que P es una función de t.

Año	Población (millones)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080
2010	6870

C. El costo C de envío de un paquete por correo depende de su peso w. Aunque no hay alguna fórmula simple que relacione a w con C, la oficina de correos tiene una regla para determinar C cuando se conoce w.

D. La aceleración vertical a del suelo, medida por un sismógrafo durante un terremoto, es una función del tiempo transcurrido t. La figura 1 muestra una gráfica generada por la actividad sísmica durante el terremoto de Northridge que sacudió Los Ángeles en 1994. Para un determinado valor de t, la gráfica proporciona un valor correspondiente de a.

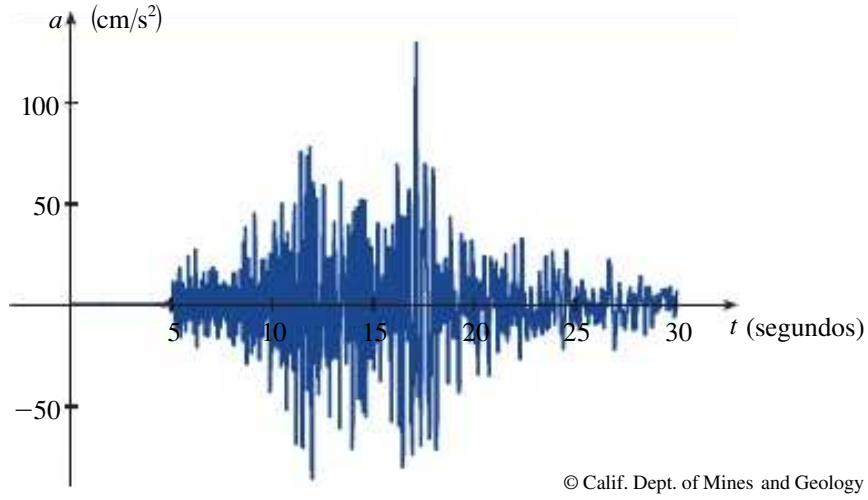


FIGURA 1
Aceleración vertical de suelo durante el terremoto de Northridge

Cada uno de estos ejemplos describe una regla de acuerdo con la cual, a un número dado (r, t, w o t), se le asigna otro número (A, P, C o a). En cada caso se dice que el segundo número es una función del primero.

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E.

Usualmente se consideran funciones para las cuales los conjuntos D y E son conjuntos de números reales. Al conjunto D se le denomina **dominio** de la función. El número $f(x)$ es el **valor de f en x** y se lee "f *de* x". El **rango** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ conforme x varía a través de todo el dominio. Un símbolo que representa un número arbitrario en el *dominio* de una función f se llama **variable independiente**. Un símbolo que representa un número en el *rango* de f se conoce como **variable dependiente**. En el ejemplo A**,** r es la variable independiente, y A es la variable dependiente.

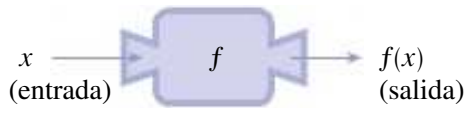


FIGURA 2
Diagrama de una función *f* como una máquina

Es útil pensar en una función como una **máquina** (véase la figura 2). Si x está en el dominio de la función f, cuando x entra en la máquina, esta la acepta como una entrada apropiada y produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Así, puede pensar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas, y en el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.

Las funciones preprogramadas en una calculadora son ejemplos de una función como una máquina. Por ejemplo, la tecla raíz cuadrada en la calculadora calcula esa función. Oprima la tecla etiquetada $\sqrt{\ }$ (o $\sqrt{x}$) e introduzca la entrada x; si $x < 0$, entonces x no está en el dominio de esta función; es decir, x no es una entrada aceptable, y la calculadora indicará un error. Si $x \geqslant 0$, entonces se presentará una aproximación a $\sqrt{x}$ en la pantalla. Así, la tecla $\sqrt{x}$ en la calculadora no es exactamente lo mismo que la función matemática f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

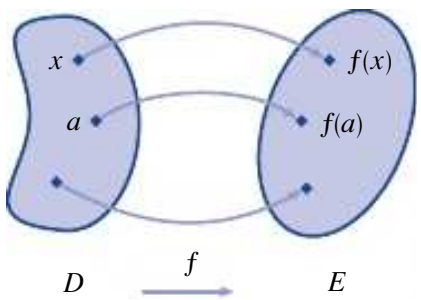


FIGURA 3
Diagrama de flechas para *f*

Otra forma de imaginar una función es con un **diagrama de flechas** como en la figura 3. Cada flecha conecta un elemento de D con un elemento de E. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x, $f(a)$ está asociada con a, y así sucesivamente.

El método más común para visualizar una función es su gráfica. Si f es una función con dominio D, entonces su **gráfica** es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

(Observe que estos son pares de entrada-salida). En otras palabras, la gráfica de f consta de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado tales que $y = f(x)$ y x está en el dominio de f.

La gráfica de una función f presenta una imagen útil del comportamiento o "historia de vida" de una función. Dado que la coordenada y de cualquier punto (x, y) en la gráfica es $y = f(x)$, se puede leer el valor de $f(x)$ de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto x (véase la figura 4). La gráfica de f permite también tener una imagen visual del dominio de f en el eje x y su rango en el eje y como en la figura 5.

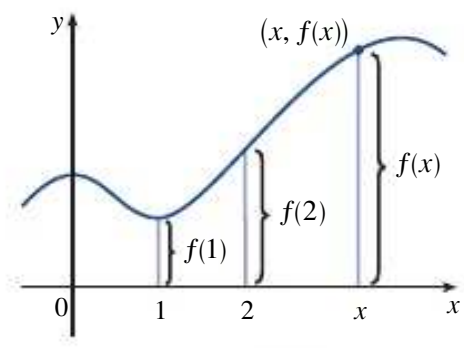


FIGURA 4

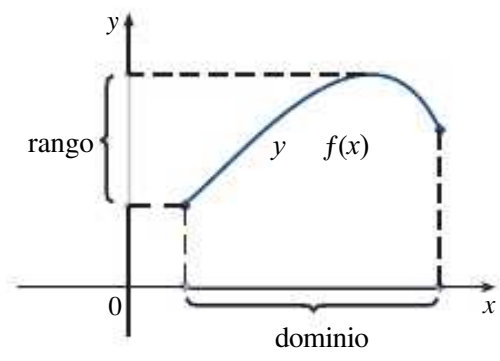


FIGURA 5

EJEMPLO 1 La gráfica de una función f se muestra en la figura 6.
(a) Encuentre los valores de $f(1)$ y $f(5)$.
(b) ¿Cuál es el dominio y el rango de f?

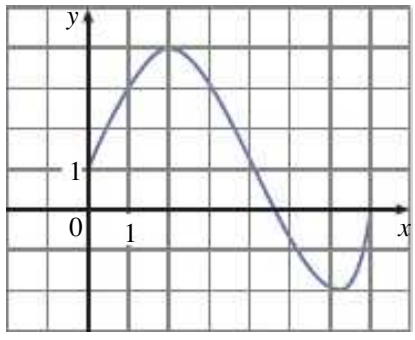


FIGURA 6

La notación por intervalos está dada en el apéndice A.

SOLUCIÓN
(a) De la figura 6 se ve que el punto (1, 3) está en la gráfica de f, por lo que el valor de f en 1 es $f(1) = 3$. (En otras palabras, el punto en la gráfica que se encuentra arriba de $x = 1$ está 3 unidades arriba del eje x.)

Cuando $x = 5$, la gráfica se encuentra aproximadamente a 0.7 unidades por debajo del eje x, así que se estima que $f(5) \approx -0.7$.

(b) Vea que $f(x)$ está definida cuando $0 \leqslant x \leqslant 7$, por lo que el dominio de f es el intervalo cerrado $[0, 7]$. Observe que f toma todos los valores de -2 a 4, por lo que el rango de f es

$$\{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\} = [-2, 4]$$ ■

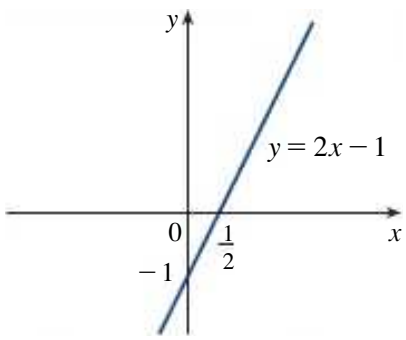


FIGURA 7

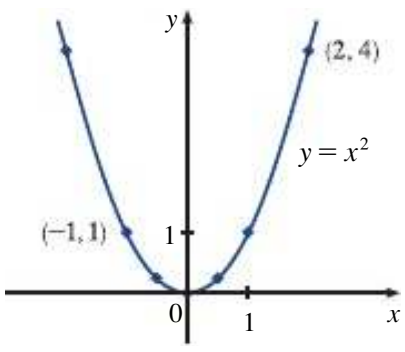


FIGURA 8

EJEMPLO 2 Trace la gráfica y encuentre el dominio y rango de cada una de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = 2x - 1$ (b) $g(x) = x^2$

SOLUCIÓN

(a) La ecuación de la gráfica es $y = 2x - 1$, y representa la ecuación de una recta con pendiente 2 e intersección con el eje y en -1. (Recuerde que la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta es $y = mx + b$. Véase el apéndice B). Esto permite dibujar una parte de la gráfica de f en la figura 7. La expresión $2x - 1$ está definida para todos los números reales, por lo que el dominio de f es el conjunto de todos los números reales, que se denota por $\mathbb{R}$. La gráfica muestra que el rango también es $\mathbb{R}$.

(b) Dado que $g(2) = 2^2 = 4$ y $g(-1) = (-1)^2 = 1$, se pueden colocar los puntos (2, 4) y $(-1, 1)$ junto con algunos otros puntos de la gráfica, y después unirlos para obtener la gráfica (figura 8). La ecuación de la gráfica es $y = x^2$ y representa una parábola (véase el apéndice C). El dominio de g es $\mathbb{R}$. El rango de g consiste de todos los valores de $g(x)$, esto es, todos los números de la forma x^2. Pero $x^2 \geqslant 0$ para todos los números x, y cualquier número positivo y es un cuadrado. Por lo que el rango de g es $\{y \mid y \geqslant 0\} = [0, \infty)$. Esto se puede ver en la figura 8. ■

EJEMPLO 3 Si $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ y $h \neq 0$, evalúe $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

SOLUCIÓN Primero evalúe $f(a + h)$ reemplazando x por $a + h$ en la expresión para $f(x)$:

$$f(a + h) = 2(a + h)^2 - 5(a + h) + 1$$
$$= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a + h) + 1$$
$$= 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1$$

Después se sustituye en la expresión dada y se simplifica:

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1) - (2a^2 - 5a + 1)}{h}$$
$$= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 - 2a^2 + 5a - 1}{h}$$
$$= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5$$

■

La expresión

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

en el ejemplo 3 se llama **cociente de diferencias** y se presenta en cálculo con frecuencia. Como se verá en el capítulo 2, representa la razón de cambio de $f(x)$ entre $x = a$ y $x = a + h$.

Representaciones de funciones

Hay cuatro posibles maneras de representar una función:

- verbalmente (con una descripción en palabras)
- numéricamente (con una tabla de valores)
- visualmente (con una gráfica)
- algebraicamente (con una fórmula explícita)

Si una función puede representarse de las cuatro maneras, con frecuencia es muy útil pasar de una representación a otra a fin de disponer de información adicional de la función. (En el ejemplo 2, se empezó con formas algebraicas y luego se obtuvieron gráficas.) Pero ciertas funciones se describen más naturalmente por una forma que por otra. Con esto en mente, se reexaminarán las cuatro situaciones que se consideraron al inicio de esta sección.

t (años desde 1900)	Población (millones)
0	1650
10	1750
20	1860
30	2070
40	2300
50	2560
60	3040
70	3710
80	4450
90	5280
100	6080
110	6870

A. La representación quizá más útil del área de un círculo como una función de su radio es la fórmula algebraica $A(r) = \pi r^2$, aunque es posible compilar una tabla de valores para trazar una gráfica (la mitad de una parábola). Debido a que un círculo tiene un radio positivo, el dominio es $\{r \mid r > 0\} = (0, \infty)$ y el rango $(0, \infty)$.

B. Se da una descripción de la función en palabras: $P(t)$ es la población humana del mundo en el tiempo t. Ahora medirá t, así que $t = 0$ corresponde al año 1900. La tabla de valores de la población mundial proporciona una representación adecuada de esta función. Si se grafican estos valores, se obtiene la gráfica (llamada *gráfica de dispersión*) en la figura 9. También es una representación útil porque la gráfica permite disponer de todos los datos a la vez. ¿Qué pasa con una fórmula? Por supuesto, es imposible concebir una fórmula explícita que proporcione la población humana exacta $P(t)$ en cualquier tiempo t. Pero es posible encontrar una expresión para una función que se *aproxime* a $P(t)$. De hecho, utilizando los métodos que se explican en la sección 1.2, se obtiene la aproximación

$$P(t) \approx f(t) = (1.43653 \times 10^9) \cdot (1.01395)^t$$

La figura 10 muestra que es un "ajuste" razonablemente bueno. La función f se llama *modelo matemático* para el crecimiento de la población. En otras palabras, es una función con una fórmula explícita que aproxima el comportamiento de la función dada. Sin embargo, se verá que las ideas del cálculo también pueden aplicarse a una tabla de valores; una fórmula explícita no es necesaria.

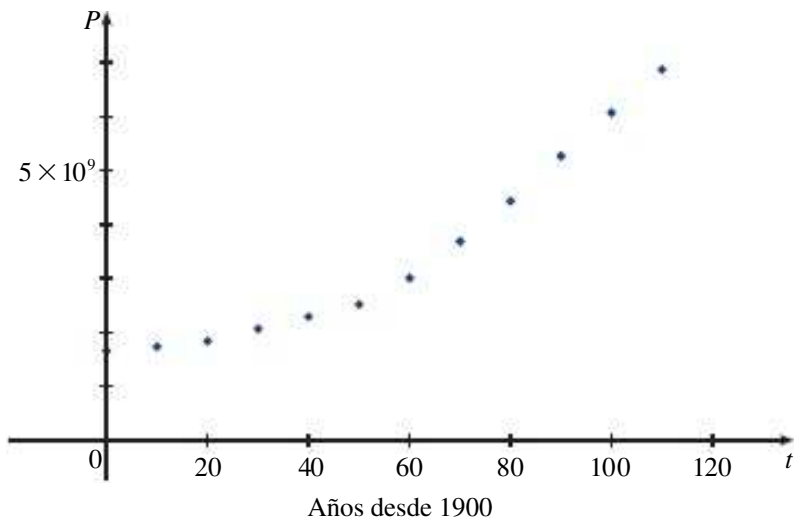


FIGURA 9

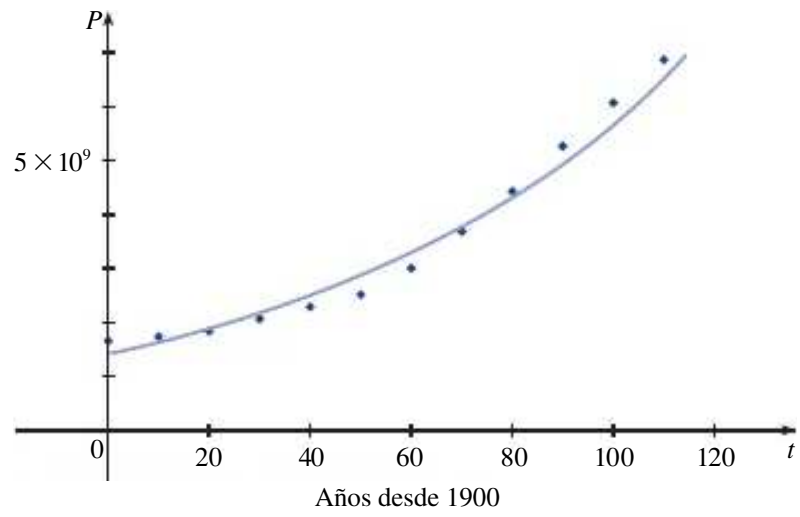


FIGURA 10

Una función definida por una tabla de valores se llama función *tabular*.

w (gramos)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 20$	2.90
$20 < w \leq 30$	5.50
$30 < w \leq 40$	7.00
$40 < w \leq 50$	8.50
.	.
.	.
.	.

La función P es típica de aquellas que surgen cuando se intenta aplicar el cálculo en el mundo real. Comienza con una descripción verbal de una función. Quizá sea capaz de elaborar una tabla de valores de la función, tal vez de lecturas del instrumento en un experimento científico. A pesar de que no tenga un conocimiento completo de los valores de la función, se verá durante el desarrollo de este libro que todavía es posible realizar las operaciones del cálculo con dicha función.

C. Nuevamente la función se describe con palabras: sea $C(w)$ el costo de envío por correo de un paquete con peso w. La regla que el Servicio Postal de Hong Kong utiliza desde 2015 para el correo a Taiwán es la siguiente: el costo es \$2.90 para 20 g o menos, \$5.50 por 30 g o menos, y \$1.50 por cada 10 g más o parte de estos. La tabla de valores que se muestra al margen es la representación más conveniente para esta función, aunque es posible trazar una gráfica (véase el ejemplo 10).

D. La gráfica que se muestra en la figura 1 es la representación más natural de la función aceleración vertical $a(t)$. Es cierto que podría construirse una tabla de valores, y que incluso es posible idear una fórmula aproximada. Pero todo lo que necesita saber un geólogo, las amplitudes y los patrones, puede verse fácilmente en la

gráfica. (Lo mismo es cierto para los patrones que se observan en los electrocardiogramas de pacientes que sufren del corazón y en polígrafos para la detección de mentiras).

En el ejemplo siguiente, se traza la gráfica de una función definida verbalmente.

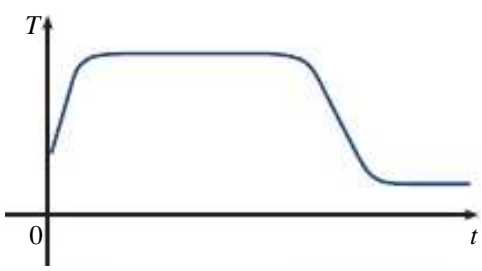


FIGURA 11

EJEMPLO 4 Al abrir un grifo de agua caliente, la temperatura T del agua depende de cuánto tiempo ha estado saliendo el agua. Dibuje una gráfica de T como una función del tiempo t que ha transcurrido desde que fue abierto el grifo.

SOLUCIÓN La temperatura inicial del agua corriente es cercana a la temperatura ambiente porque el agua ha permanecido en las tuberías. Cuando empieza a salir el agua desde el tanque de agua caliente, T aumenta rápidamente. En la siguiente fase, T es constante a la temperatura del agua caliente en el tanque. Cuando el tanque se drena, T disminuye hasta la temperatura de la fuente de agua. Esto permite hacer la gráfica de T en función de t en la figura 11. ■

El ejemplo siguiente inicia con una descripción verbal de una función en una situación física, y hay que obtener una fórmula algebraica explícita. La capacidad para hacer esto es una habilidad útil para resolver problemas de cálculo en los que se piden los valores máximo o mínimo de cantidades.

EJEMPLO 5 Un contenedor rectangular sin tapa tiene un volumen de 10 m^3. La longitud de su base es dos veces su ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado, y el material para los lados cuesta \$6 por metro cuadrado. Exprese el costo de los materiales como una función del ancho de la base.

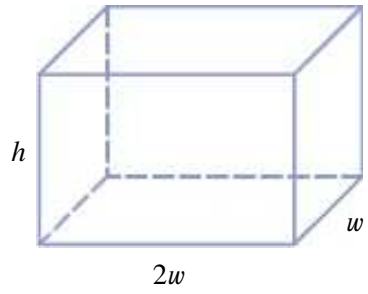


FIGURA 12

SOLUCIÓN Dibuje un diagrama como el de la figura 12 e introduzca la notación w y $2w$ para el ancho y la longitud de la base, respectivamente, y h para la altura.

El área de la base es $(2w)w = 2w^2$, por lo que el costo en dólares de los materiales para la base es $10(2w^2)$. Dos de los lados tienen área wh, y los otros dos tienen área $2wh$, por lo que el costo de los materiales para los lados es $6[2(wh) + 2(2wh)]$. El costo total es, por tanto,

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh$$

Para expresar C solo como una función de w, se necesita eliminar h y para hacerlo se utiliza el hecho de que el volumen es de 10 m^3. Por tanto,

$$w(2w)h = 10$$

esto da

$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$$

Sustituyendo en la expresión para C, se tiene

$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

Por tanto, la ecuación

$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w} \qquad w > 0$$

expresa C como una función de w. ■

SP Para establecer funciones aplicadas como en el ejemplo 5, puede ser útil revisar los principios de la resolución de problemas como se explica en la página 71, particularmente el *Paso 1: Comprenda el problema*.

EJEMPLO 6 Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

3 Reglas de derivación

© Mechanik / Shutterstock.com

En el proyecto de la página 208 se calculará la distancia de una pista del aeropuerto en la que un piloto debe iniciar el descenso para un aterrizaje suave.

HASTA AQUÍ SE HA VISTO CÓMO INTERPRETAR las derivadas en términos de pendientes y razones de cambio. Se han estudiado cómo estimar las derivadas de funciones dadas por medio de tablas de valores. También se ha aprendido la manera de graficar las derivadas de funciones que se definen gráficamente y utilizado la definición de derivada para calcular las derivadas de funciones definidas mediante fórmulas. Pero sería tedioso siempre tener que aplicar la definición, por lo que en este capítulo se desarrollan las reglas para determinar derivadas sin tener que usar directamente la definición. Estas reglas de derivación permiten calcular con relativa facilidad derivadas de funciones polinomiales, racionales, algebraicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas. Entonces se usarán estas reglas para resolver problemas en que intervienen razones de cambio y la aproximación de funciones.

3.1 Derivadas de funciones polinomiales y exponenciales

En esta sección aprenderá la manera de derivar funciones constantes, potencia, polinomiales y exponenciales.

Se empieza por la más sencilla de todas las funciones: la función constante $f(x) = c$. La gráfica de esta función es la recta horizontal $y = c$, la cual tiene pendiente 0, por lo que debe tener $f'(x) = 0$. (Véase la figura 1.) Una demostración formal, a partir de la definición de derivada, también es fácil:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

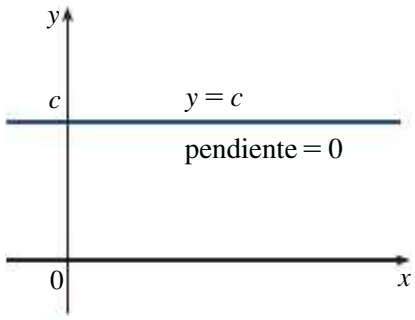


FIGURA 1
La gráfica de $f(x) = c$ es la recta $y = c$, por lo que $f'(x) = 0$.

En la notación de Leibniz se escribe esta regla de la siguiente manera.

Derivada de una función constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Función potencia

Enseguida, se consideran las funciones $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo. Si $n = 1$, la gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$, que tiene pendiente 1 (véase la figura 2). Por lo que

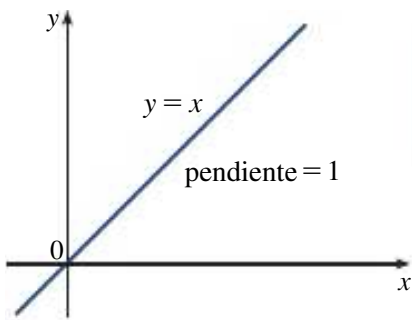


FIGURA 2
La gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$, por lo que $f'(x) = 1$.

1
$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

(También puede demostrar la ecuación 1 a partir de la definición de derivada.) Ya se ha investigado los casos $n = 2$ y $n = 3$. En efecto, en la sección 2.8 (ejercicios 19 y 20) se encontró que

2
$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Para $n = 4$, se encontró la derivada de $f(x) = x^4$ como sigue:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^4 - x^4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3$$

Así

3
$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Si compara las ecuaciones (1), (2) y (3), se observa un patrón emergente. Parece razonable presuponer que, cuando n es un entero positivo, $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$. Esto resulta cierto.

Regla de la potencia Si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

PRIMERA DEMOSTRACIÓN La fórmula

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

se puede verificar simplemente multiplicando el lado derecho (o mediante la suma del segundo factor como una serie geométrica). Si $f(x) = x^n$, se puede utilizar la ecuación 2.7.5 para $f'(a)$ y la ecuación anterior para escribir

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}$$

El teorema del binomio se presenta en la página de referencia 1.

Al determinar la derivada de x^4, se tuvo que desarrollar $(x + h)^4$. En este caso, se necesita desarrollar $(x + h)^n$ y, para hacerlo, se utiliza el teorema del binomio:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

porque todos los términos, excepto el primero, tienen h como factor, y, por tanto, tienden a 0. ■

En el ejemplo 1 se ilustra la regla de la potencia usando varias notaciones.

EJEMPLO 1
(a) Si $f(x) = x^6$, entonces $f'(x) = 6x^5$. (b) Si $y = x^{1000}$, entonces $y' = 1000x^{999}$.
(c) Si $y = t^4$, entonces . $\frac{dy}{dt} = 4t^3$. (d) $\frac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$ ■

¿Qué se puede decir acerca de las funciones potencia con exponentes enteros negativos? En el ejercicio 65 se pide al lector que verifique, a partir de la definición de derivada, que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Por lo que se puede escribir de nuevo esta ecuación como

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2}$$

y, por consiguiente, la regla de la potencia se cumple cuando $n = -1$. De hecho, en la sección siguiente [ejercicio 3.2.64(c)] se demuestra que se cumple para todos los enteros negativos.

¿Qué sucede si el exponente es una fracción? En el ejemplo 2.8.3 se encontró que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

lo cual se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Esto hace ver que la regla de la potencia es verdadera incluso cuando $n = \frac{1}{2}$. De hecho, en la sección 3.6 se demuestra que es verdadera para todos los números reales n.

Regla de la potencia (versión general) Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

EJEMPLO 2 Derive:
(a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

SOLUCIÓN En cada caso, reescriba la función como una potencia de x.
(a) Dado que $f(x) = x^{-2}$, se utiliza la regla de la potencia con $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

(b)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \tfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$ ■

Observe de la figura 3 que la función y del ejemplo 2(b) está aumentando cuando y' es positiva y disminuye cuando y' es negativa. En el capítulo 4 se demostrará que, en general, *una función es creciente cuando su derivada es positiva y decreciente cuando su derivada es negativa*.

En la figura 3 se muestra la función y del ejemplo 2(b) y su derivada y'. Observe que y no es derivable en 0 (y' no está definida ahí).

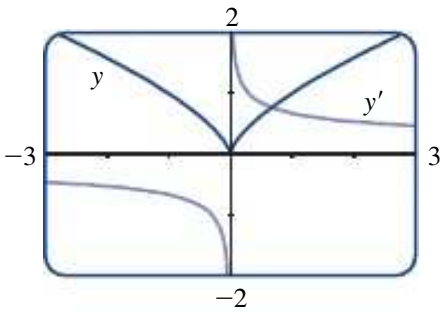


FIGURA 3
$y = \sqrt[3]{x^2}$

La regla de la potencia permite determinar rectas tangentes sin hacer uso de la definición de derivada. Además, permite encontrar *rectas normales*. La **recta normal** a una curva C en un punto P es la recta a través de P que es perpendicular a la recta tangente en P. (En el estudio de la óptica, necesita considerar el ángulo entre un rayo de luz y la recta normal a un lente.)

EJEMPLO 3 Determine la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $y = x\sqrt{x}$ en el punto (1, 1). Ilustre trazando la curva y estas rectas.

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{1/2} = x^{3/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}x^{(3/2)-1} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

Por lo que, la pendiente de la recta tangente en (1, 1) es $f'(1) = \frac{3}{2}$. Por consiguiente, la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = \tfrac{3}{2}(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

La recta normal es perpendicular a la recta tangente de tal manera que su pendiente es el recíproco negativo de $\frac{3}{2}$, es decir, $-\frac{2}{3}$. En estos términos, una ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\tfrac{2}{3}(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{5}{3}$$

En la figura 4 se traza la gráfica de la curva y las rectas tangente y normal. ■

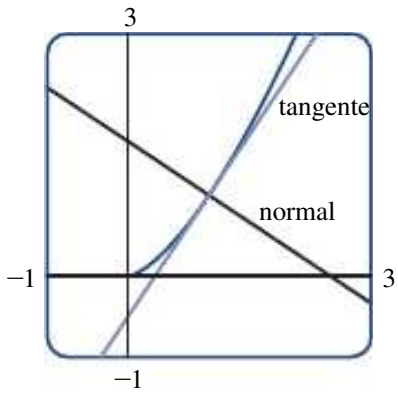


FIGURA 4
$y = x\sqrt{x}$

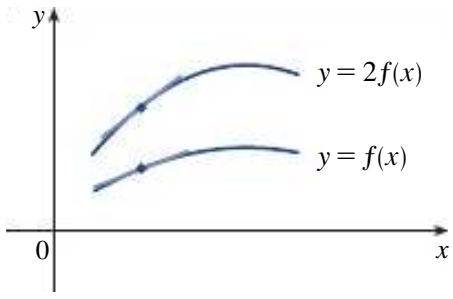
Nuevas derivadas a partir de anteriores

Cuando se forman nuevas funciones a partir de funciones anteriores por adición, sustracción o multiplicación por una constante, sus derivadas se pueden calcular en términos de la derivada de sus funciones anteriores. En particular, en la fórmula siguiente dice que *la derivada de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la derivada de la función.*

Regla del múltiplo constante Si c es una constante y f es una función derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

Interpretación geométrica de la regla del múltiplo constante



La multiplicación por $c = 2$ estira la gráfica verticalmente en un factor de 2. Todas las elevaciones se han duplicado, pero los desplazamientos permanecen iguales. Las pendientes también se duplican.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = cf(x)$. Entonces

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

$$= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(por la ley 3 de los límites)}$$

$$= cf'(x)$$

■

EJEMPLO 4

(a) $\dfrac{d}{dx}(3x^4) = 3\dfrac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$

(b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}[(-1)x] = (-1)\dfrac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1$ ■

La regla siguiente dice que *la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas.*

Si se utiliza la notación con primas, puede escribir la regla de la suma como

$$(f + g)' = f' + g'$$

Regla de la suma Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

DEMOSTRACIÓN Sea $F(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad \text{(por la ley 1 de los límites)}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$ ■

La regla de la suma puede extenderse a la suma de cualquier número de funciones. Por ejemplo, si se aplica este teorema dos veces, se obtiene

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$$

Al escribir $f - g$ como $f + (-1)g$ y aplicar la regla de la suma y la del múltiplo constante, se obtiene la fórmula siguiente.

Regla de la diferencia Si tanto f como g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

Las reglas de múltiplo constante, la suma y la diferencia se pueden combinar con la regla de la potencia para derivar cualquier función polinomial, como se muestra en los ejemplos que siguen.

EJEMPLO 5

$$\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0$$

$$= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6$$

■

EJEMPLO 6 Encuentre los puntos sobre la curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ donde la recta tangente es horizontal.

SOLUCIÓN Se tienen tangentes horizontales donde la derivada es cero. Observe que,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4)$$

$$= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3)$$

Así, $dy/dx = 0$ si $x = 0$ o $x^2 - 3 = 0$, es decir, $x = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, la curva dada tiene rectas tangentes horizontales cuando $x = 0$, $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$. Los puntos correspondientes son $(0, 4)$, $(\sqrt{3}, -5)$, y $(-\sqrt{3}, -5)$. (Véase la figura 5.) ■

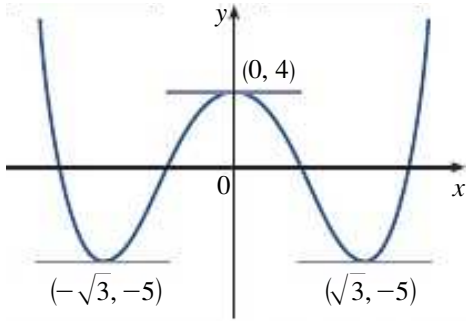


FIGURA 5
La curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ y sus tangentes horizontales

EJEMPLO 7 La ecuación de movimiento de una partícula es $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Determine la aceleración como una función del tiempo. ¿Cuál es la aceleración después de 2 segundos?

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 10t + 3$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 10$$

La aceleración después de 2 s es $a(2) = 14\ \text{cm}/\text{s}^2$. ■

Funciones exponenciales

Intente calcular la derivada de la función exponencial $f(x) = b^x$, aplicando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{b^{x+h} - b^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{b^x b^h - b^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{b^x(b^h - 1)}{h}$$

El factor b^x no depende de h, por lo que puede llevarlo delante del límite:

$$f'(x) = b^x \lim_{h\to 0}\frac{b^h - 1}{h}$$

Observe que el límite es el valor de la derivada de f en 0; esto es,

$$\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = f'(0)$$

Por tanto, ha demostrado que, si la función exponencial $f(x) = b^x$ es derivable en 0, entonces es derivable para cualquier x; por lo que

$$f'(x) = f'(0)b^x \tag{4}$$

Esta ecuación dice que la r*azón de cambio de cualquier función exponencial es proporcional a la función misma*. (La pendiente es proporcional a la altura.)

En la tabla que aparece a la izquierda, se presenta una evidencia numérica de la existencia de $f'(0)$ en los casos $b = 2$ y $b = 3$. (Los valores tienen una aproximación redondeada a cuatro decimales.) Parece que los límites existen y

h	$\frac{2^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$
0.1	0.7177	1.1612
0.01	0.6956	1.1047
0.001	0.6934	1.0992
0.0001	0.6932	1.0987

$$\text{para } b = 2, \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0.69$$

$$\text{para } b = 3, \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1.10$$

De hecho, se puede demostrar que estos límites existen y se redondean hasta seis decimales, los valores son

$$\frac{d}{dx}(2^x)\bigg|_{x=0} \approx 0.693147 \qquad \frac{d}{dx}(3^x)\bigg|_{x=0} \approx 1.098612$$

Por esto, de la ecuación 4, se tiene

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1.10)3^x \tag{5}$$

De todas las elecciones posibles para la base b de la ecuación 4, se tiene la fórmula más sencilla de derivación cuando $f'(0) = 1$. En vista de los cálculos de $f'(0)$ para $b = 2$ y $b = 3$, parece razonable que exista un número b entre 2 y 3 para el que $f'(0) = 1$. Es costumbre denotar este valor con la letra e. (De hecho, así se presentó e en la sección 1.4.) Así, se tiene la definición siguiente.

En el ejercicio 1 verá que e se encuentra entre 2.7 y 2.8. Más adelante se podrá demostrar que e con cinco dígitos (o posiciones) decimales es

$$e \approx 2.71828$$

Deÿnición del número *e*

e es el número tal que $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

Geométricamente, esto significa que, de todas las funciones exponenciales posibles $y = b^x$, la función $f(x) = e^x$ es aquella cuya recta tangente en $(0, 1)$ tiene pendiente $f'(0)$ que es exactamente 1. (Véanse las figuras 6 y 7.)

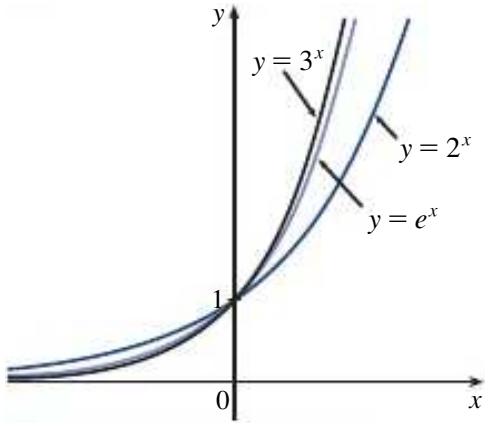


FIGURA 6

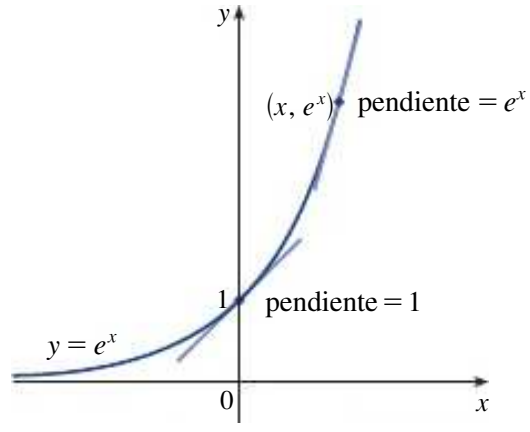


FIGURA 7

Si se hace $b = e$ y, por tanto, $f'(0) = 1$ en la ecuación 4, se convierte en la siguiente importante fórmula de derivación.

TEC Visual 3.1 utiliza el comportamiento de una pendiente para ilustrar esta fórmula.

Derivada de la función exponencial natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

De aquí se ve que la función exponencial $f(x) = e^x$ tiene la propiedad de que es su propia derivada. El significado geométrico de esto es que la pendiente de una recta tangente a la curva $y = e^x$ es igual a la coordenada y del punto (véase la figura 7).

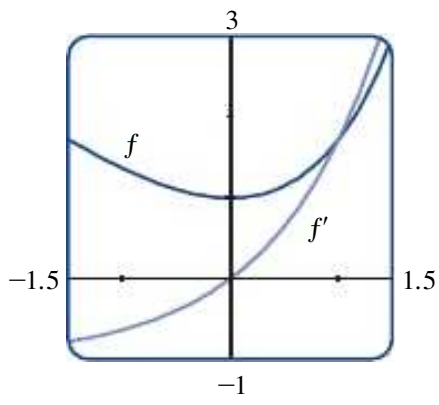


FIGURA 8

EJEMPLO 8 Si $f(x) = e^x - x$, encuentre f' y f''. Compare las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN Si se aplica la regla de la diferencia, se tiene

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

En la sección 2.8 se define la segunda derivada como la derivada de f', por lo que

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

La función f y su derivada f' se grafican en la figura 8. Observe que f tiene una recta tangente horizontal cuando $x = 0$; esto corresponde al hecho de que $f'(0) = 0$. Observe también que para $x > 0$, $f'(x)$ es positiva y f es creciente. Cuando $x < 0$, $f'(x)$ es negativa y f es decreciente. ■

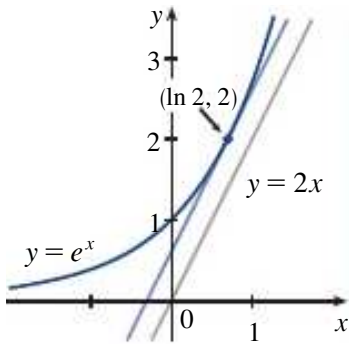


FIGURA 9

EJEMPLO 9 ¿En qué punto de la curva $y = e^x$ la recta tangente es paralela a la recta $y = 2x$?

SOLUCIÓN Puesto que $y = e^x$, se tiene $y' = e^x$. Sea a la coordenada x del punto en cuestión. Entonces, la pendiente de la recta tangente en ese punto es e^a. Esta recta tangente será paralela a la recta $y = 2x$ si tiene la misma pendiente; es decir, 2. Si se igualan las pendientes, se tiene

$$e^a = 2 \qquad a = \ln 2$$

Por tanto, el punto requerido es $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$. (Véase la figura 9.) ■

3.1 EJERCICIOS

1. (a) ¿Cómo se define el número e?
(b) Use una calculadora para estimar los valores de los límites

$$\lim_{h\to 0}\frac{2.7^h-1}{h} \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{2.8^h-1}{h}$$

redondeelos hasta dos decimales. ¿Qué puede concluir acerca del valor de e?

2. (a) Trace a mano la función $f(x)=e^x$, poniendo particular atención a la forma en como la gráfica cruza el eje y. ¿Qué hecho le permite hacer esto?
(b) ¿Qué tipos de funciones son $f(x)=e^x$ y $g(x)=x^e$? Compare las fórmulas de derivación para f y g.
(c) ¿Cuál de las dos funciones en el inciso (b) crece más rápidamente cuando x es muy grande?

3–32 Derive cada una de las funciones siguientes.

3. $f(x)=186.5$

4. $f(x)=\sqrt{30}$

5. $f(x)=5.2x+2.3$

6. $g(x)=\frac{7}{4}x^2-3x+12$

7. $f(t)=2t^3-3t^2-4t$

8. $f(t)=1.4t^5-2.5t^2+6.7$

9. $g(x)=x^2(1-2x)$

10. $H(u)=(3u-1)(u+2)$

11. $y=x^{-2/5}$

12. $B(y)=ay^{-3}$

13. $F(r)=\dfrac{5}{r^3}$

14. $y=x^{5/3}-x^{2/3}$

15. $R(a)=(3a+1)^2$

16. $h(t)=\sqrt[4]{t}-4e^t$

17. $S(p)=\sqrt{p}-p$

18. $y=\sqrt[3]{x}\,(2+x)$

19. $y=3e^x+\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$

20. $V(R)=\frac{4}{3}\pi R^3$

21. $h(u)=Au^3+Bu^2+Cu$

22. $y=\dfrac{\sqrt{x}+x}{x^2}$

23. $y=\dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x}}$

24. $G(t)=\sqrt{5t}+\dfrac{\sqrt{7}}{t}$

25. $j(x)=x^{2.4}+e^{2.4}$

26. $y=ae^v+\dfrac{b}{v}+\dfrac{c}{v^2}$

27. $G(q)=(1+q^{-1})^2$

28. $F(z)=\dfrac{A+Bz+Cz^2}{z^2}$

29. $f(v)=\dfrac{\sqrt[3]{v}-2ve^v}{v}$

30. $D(t)=\dfrac{1+16t^2}{(4t)^3}$

31. $z=\dfrac{A}{y^{10}}+Be^y$

32. $y=e^{x+1}+1$

33–36 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes en el punto dado.

33. $y=2x^3-x^2+2, \quad (1,3)$

34. $y=2e^x+x, \quad (0,2)$

35. $y=x+\dfrac{2}{x}, \quad (2,3)$

36. $y=\sqrt[4]{x}-x \quad (1,0)$

37–38 Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a cada una de las curvas siguientes en el punto dado.

37. $y=x^2-x^4, \quad (1,0)$

38. $y^4=x^3, \quad (1,1)$

39–40 Encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto dado, a cada una de las curvas siguientes. Ilustre trazando la gráfica de la curva y de la recta tangente, en la misma pantalla.

39. $y=3x^2-x^3, \quad (1,2)$

40. $y=x-\sqrt{x}, \quad (1,0)$

41–42 Encuentre $f'(x)$. Compare las gráficas de f y f' y utilícelas para explicar por qué su respuesta es razonable.

41. $f(x)=x^4-2x^3+x^2$

42. $f(x)=x^5-2x^3+x-1$

43. (a) Trace la gráfica de la función

$$f(x)=x^4-3x^3-6x^2+7x+30$$

en el rectángulo de vista $[-3,5]$ por $[-10,50]$.
(b) Con la misma gráfica del inciso (a) estime las pendientes y trace a mano la gráfica de f'. (Véase el ejemplo 2.8.1.)
(c) Calcule $f'(x)$ y utilice esta expresión para graficar f' con una calculadora graficadora. Compare con su trazo del inciso (b).

44. (a) Trace la gráfica de la función $g(x)=e^x-3x^2$ en el rectángulo de vista $[-1,4]$ por $[-8,8]$.
(b) Utilizando la gráfica del inciso (a) para calcular pendientes, haga a mano un trazo aproximado de la gráfica de g'. (Véase el ejemplo 2.8.1.)
(c) Calcule $g'(x)$ y utilice esta expresión, con un dispositivo graficador, para trazar la gráfica de g'. Compare con su trazo del inciso (b).

45–46 Encuentre la primera y segunda derivadas de cada una de las funciones siguientes.

45. $f(x)=0.001x^3-0.02x^5$

46. $G(r)=\sqrt{r}+\sqrt[3]{r}$

47–48 Encuentre la primera y segunda derivadas de cada una de las funciones siguientes. Verifique para ver si sus respuestas son razonables, comparando las gráficas de f, f' y f''.

47. $f(x)=2x-5x^{3/4}$

48. $f(x)=e^x-x^3$

49. La ecuación de movimiento de una partícula es $s = t^3 - 3t$, donde s está en metros y t en segundos. Encuentre
(a) la velocidad y la aceleración como funciones de t,
(b) la aceleración después de 2 s, y
(c) la aceleración cuando la velocidad es cero.

50. La ecuación de movimiento de una partícula es $s = t^4 - 2t^3 + t^2 - t$, donde s está en metros y t en segundos.
(a) Encuentre la velocidad y la aceleración como funciones de t.
(b) Encuentre la aceleración después de 1 s.
(c) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración, en la misma pantalla.

51. Los biólogos han propuesto un polinomio cúbico para modelar la longitud L del pescado de roca de Alaska de edad A:

$$L = 0.0155A^3 - 0.372A^2 + 3.95A + 1.21$$

donde L se mide en pulgadas y A en años. Calcule

$$\left.\frac{dL}{dA}\right|_{A=12}$$

e interprete su respuesta.

52. El número de especies de árbol S en un área dada A en la reserva forestal de Pasoh en Malasia se ha modelado por la función potencia

$$S(A) = 0.882A^{0.842}$$

donde A se mide en metros cuadrados. Determine $S'(100)$ e interprete su respuesta.

Fuente: Adaptado de K. Kochummen *et al.*, "Floristic Composition of Pasoh Forest Reserve, A Lowland Rain Forest in Peninsular Malaysia," *Journal of Tropical Forest Science* 3 (1991): 1–13.

53. La ley de Boyle establece que cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P del gas es inversamente proporcional al volumen del gas.
(a) Suponga que la presión de una muestra de aire que ocupa 0.106 m^3 a 25 °C es 50 kPa. Exprese V como una función de P.
(b) Calcule dV/dP cuando $P = 50$ kPa. ¿Cuál es el significado de la derivada? ¿Cuáles son sus unidades?

54. Los neumáticos de automóvil deben ser inflados correctamente porque un alto o bajo inflado puede causar desgaste prematuro. Los datos de la tabla muestran la vida L (en miles de kilómetros) para un determinado tipo de neumático a diversas presiones P (en kPa).

P	179	193	214	242	262	290	311
L	80	106	126	130	119	113	95

(a) Utilice una calculadora graficadora o una computadora para modelar la vida del neumático con una función cuadrática de la presión.
(b) Utilice el modelo para calcular dL/dP cuando $P = 200$ y cuando $P = 300$. ¿Cuál es el significado de la derivada? ¿Cuáles son sus unidades? ¿Cuál es el significado de los signos de las derivadas?

55. Encuentre los puntos sobre la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ donde la recta tangente es horizontal.

56. ¿Para qué valores de x la gráfica de $f(x) = e^x - 2x$ tiene una recta tangente horizontal?

57. Demuestre que la curva $y = 2e^x + 3x + 5x^3$ no tiene una recta tangente cuya pendiente es 2.

58. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 + 1$ que es paralela a la recta $32x - y = 15$.

59. Encuentre las ecuaciones de ambas rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$ y paralela a la recta $3x - y = 15$.

60. ¿En qué punto sobre la curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ es la recta tangente paralela a la recta $3x - y = 5$? Ilustre trazando la gráfica de la curva y de ambas rectas.

61. Determine una ecuación de la recta normal a la curva $y = \sqrt{x}$ que es paralela a la recta $2x + y = 1$.

62. ¿Dónde la recta normal a la parábola $y = x^2 - 1$ en el punto $(-1, 0)$ interseca la parábola por segunda vez? Ilustre con un trazo de la gráfica.

63. Dibuje un diagrama que muestre que hay dos rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ que pasan por el punto $(0, -4)$. Encuentre las coordenadas de los puntos donde estas rectas tangentes intersectan la parábola.

64. (a) Encuentre las ecuaciones de ambas rectas que pasan por el punto $(2, -3)$ que son tangentes a la parábola $y = x^2 + x$.
(b) Demuestre que no hay una recta que pase por el punto $(2, 7)$ que sea tangente a la parábola. Luego dibuje un diagrama para ver por qué.

65. Utilice la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(x) = -1/x^2$. (Esto demuestra la regla de la potencia para el caso $n = -1$.)

66. Encuentre la n-ésima derivada de cada una de las funciones siguientes calculando algunas derivadas y observando el patrón de recurrencia.
(a) $f(x) = x^n$ (b) $f(x) = 1/x$

67. Encuentre un polinomio P de segundo grado tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$, y $P''(2) = 2$.

68. La ecuación $y'' + y' - 2y = x^2$ es una **ecuación diferencial** porque implica una función desconocida y y sus derivadas y' y y''. Encuentre las constantes A, B y C tales que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisface esta ecuación. (Las ecuaciones diferenciales se estudiarán en detalle en el capítulo 9.)

69. Encuentre una ecuación cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya gráfica tiene rectas tangentes horizontales en los puntos $(-2, 6)$ y $(2, 0)$.

70. Encuentre una parábola con ecuación $y = ax^2 + bx + c$ que tiene pendiente 4 en $x = 1$, pendiente -8 en $x = -1$ y que pasa por el punto $(2, 15)$.

71. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x + 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

¿Es f derivable en 1? Trace las gráficas de f y f'.

72. ¿En qué números es derivable la función g siguiente?

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 2 - x & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Proporcione una fórmula para g' y trace las gráficas de g y g'.

73. (a) ¿Para qué valores de x es la función $f(x) = |x^2 - 9|$ es derivable? Encuentre una fórmula para f'.
(b) Trace las gráficas de f y f'.

74. ¿Dónde es derivable la función $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$? Dé la función para h' y trace las gráficas de h y h'.

75. Encuentre la parábola con ecuación $y = ax^2 + bx$ cuya recta tangente en (1, 1) tiene por ecuación $y = 3x - 2$.

76. Suponga que la curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene una recta tangente cuando $x = 0$ con ecuación $y = 2x + 1$ y una recta tangente cuando $x = 1$ con ecuación $y = 2 - 3x$. Encuentre los valores de a, b, c, y d.

77. ¿Para qué valores de a y b la recta $2x + y = b$ es tangente a la parábola $y = ax^2$ cuando $x = 2$?

78. Encuentre el valor de c tal que la recta $y = \frac{3}{2}x + 6$ es tangente a la curva $y = c\sqrt{x}$.

79. ¿Cuál es el valor de c tal que la recta $y = 2x + 3$ es tangente a la parábola $y = cx^2$?

80. La gráfica de cualquier función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola. Demuestre que el promedio de las pendientes de las rectas tangentes a la parábola en los puntos finales de cualquier intervalo $[p, q]$ es igual a la pendiente de la tangente en el punto medio del intervalo.

81. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ mx + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Encuentre los valores de m y b que hacen que f sea derivable para todas.

82. Se dibuja una recta tangente a la hipérbola $xy = c$ en un punto P.
(a) Demuestre que el punto medio del segmento de esta recta tangente comprendido entre los ejes de coordenadas es P.
(b) Demuestre que el triángulo formado por la recta tangente y los ejes de coordenadas siempre tiene la misma área, no importa dónde se encuentre P sobre la hipérbola.

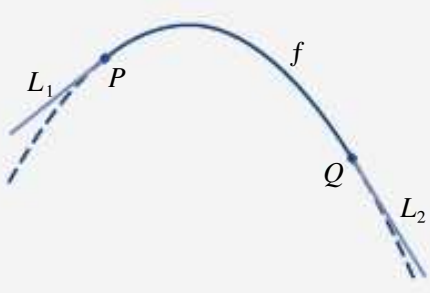
83. Evalúe $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^{1000} - 1}{x - 1}$.

84. Dibuje un diagrama que muestre dos rectas perpendiculares que se intersecan en el eje y y que son ambas tangentes a la parábola $y = x^2$. ¿Dónde se intersecan estas rectas?

85. Si $c > \frac{1}{2}$, ¿cuántas rectas que pasan por el punto $(0, c)$ son rectas normales a la parábola $y = x^2$? ¿Qué pasa si $c \leqslant \frac{1}{2}$?

86. Trace las parábolas $y = x^2$ y $y = x^2 - 2x + 2$. ¿Piensa que existe una recta que es tangente a ambas curvas? Si es así, encuentre su ecuación. Si no es así, ¿por qué no?

PROYECTO DE APLICACIÓN CONSTRUCCIÓN DE UNA MEJOR MONTAÑA RUSA



Suponga que le piden que diseñe la primera subida y bajada de una nueva montaña rusa. Luego de estudiar fotografías de sus montañas rusas favoritas, decide hacer la pendiente de la subida de 0.8 y la pendiente de la bajada de -1.6. Usted decide unir estos dos tramos rectos $y = L_1(x)$ y $y = L_2(x)$ con parte de la parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, donde x y $f(x)$ se miden en metros. Para que la pista sea suave no pueden existir cambios abruptos de dirección, por lo que se quiere que los segmentos rectos L_1 y L_2 sean tangentes a la parábola en los puntos de transición P y Q. (Véase la figura). Para simplificar las ecuaciones, decide ubicar el origen en P.

1. (a) Suponga que la distancia horizontal entre P y Q es de 30 m. Escriba las ecuaciones en a, b y c que aseguren que la pista sea suave en los puntos de transición.

(b) Resuelva las ecuaciones del inciso (a) para a, b, y c para encontrar una fórmula para $f(x)$.

(c) Trace L_1, f, y L_2 para verificar gráficamente que las transiciones son suaves.

(d) Determine la diferencia de elevación de P y Q.

2. La solución en el problema 1 podría *parecer* suave, pero se puede no *sentir* suave ya que la función está definida en partes [que consiste de $L_1(x)$ para $x < 0$, $f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 30$, y

© Susana Ortega / Shutterstock.com

$L_2(x)$ para $x > 30$] no tiene una segunda derivada continua. Por lo que decide mejorar el diseño utilizando una función cuadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ solo en el intervalo $3 \leqslant x \leqslant 27$ y unir las funciones lineales con dos funciones cúbicas:

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n \qquad 0 \leqslant x < 3$$

$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \qquad 27 < x \leqslant 30$$

(a) Escriba un sistema de ecuaciones con 11 incógnitas que garanticen que las funciones y sus dos primeras derivadas coinciden en los puntos de transición.

SAC (b) Resuelva las ecuaciones del inciso (a) con un sistema algebraico computacional para encontrar las fórmulas para $q(x)$, $g(x)$ y $h(x)$.

(c) Trace la gráfica de L_1, g, q, h, y L_2, y compare con la gráfica del problema 1(c).

3.2 Reglas del producto y el cociente

Las fórmulas de esta sección permiten derivar nuevas funciones formadas a partir de anteriores, por multiplicación o división.

Regla del producto

Por analogía con las reglas de la suma y la diferencia, podría tener la tentación de suponer, como Leibniz lo hizo hace tres siglos, que la derivada de un producto es el producto de las derivadas. Sin embargo, puede ver que esta suposición es errónea al considerar un ejemplo particular. Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Por tanto, la regla de la potencia da $f'(x) = 1$ y $g'(x) = 2x$. Pero $(fg)(x) = x^3$, por lo que $(fg)'(x) = 3x^2$. Por lo que, $(fg)' \neq f'g'$. La fórmula correcta fue descubierta por Leibniz (poco tiempo después de su falso inicio) y se llama regla del producto.

Antes de enunciar la regla del producto, vea cómo podría descubrirla. Inicie por suponer que $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones positivas derivables. Entonces se puede interpretar el producto uv como el área de un rectángulo (véase la figura 1). Si x cambia una cantidad Δx, entonces los cambios correspondientes en u y v son

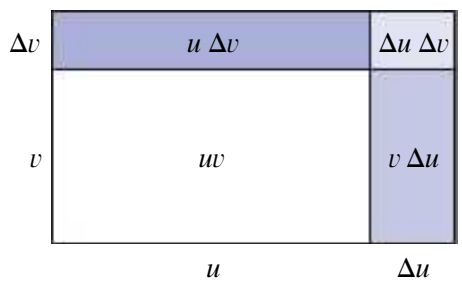


FIGURA 1
Geometría de la regla del producto

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

y el nuevo valor del producto, $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$, se puede interpretar como el área del rectángulo grande en la figura 1 (siempre que Δu y Δv sean positivos).

El cambio en el área del rectángulo es

1 $$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$

$$= \text{suma de las tres áreas sombreadas}$$

Si se divide entre Δx, se obtiene

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$